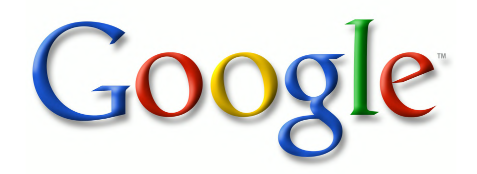
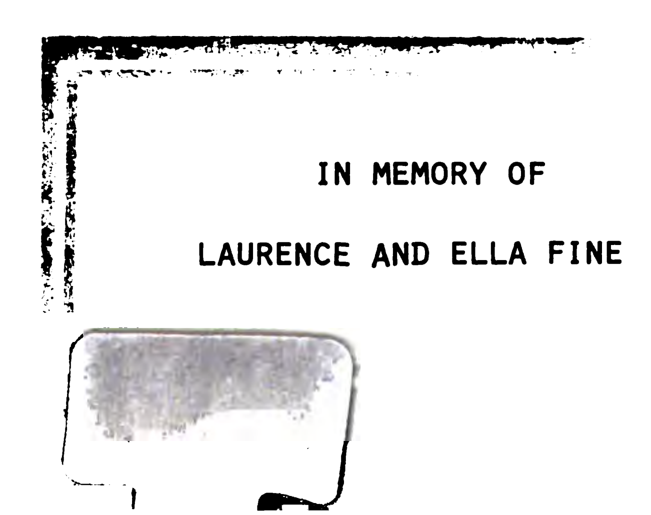

Google







RIEMANNSCHE FLÄCHEN.

I.

VORLESUNG,

GEHALTEN WÄHREND DES WINTERSEMESTERS 1891—92

VON

F. KLEIN.

GÖTTINGEN 1892.

NEUER UNVERÄNDERTER ABDRUCK.

LEIPZIG 1906.

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER.

Inhalts-Verzeichnis.

Zweiter Teil: Beziehungen von Riemanns Theorie zur Lehre von den algebraischen Kurven.

Ia. Allgemeiner Bericht, betreffend ebene Kurven.

Seit Riemann sind die eindimensionalen algebraischen Gebilde (die algebraischen Curven) einerseits von den Functionentheoretikern, anderseits von den Geometern nach den verschiedensten Richtungen in Untersuchung gezogen worden; neuerdings beginnt man auch, bei der Discussion arithmetische Gesichtspunkte einzuführen. *Zielpunkt der gegenwärtigen Vorlesung soll sein, von der Basis der Riemannschen Flächen aus über die hauptsächlichen Teile des solcherweise entstandenen Gesammtgebietes einen Überblick zu geben.* Wir gewinnen so eine Grundlage, auf die wir uns stützen können, wenn wir später das im vorigen Jahre unvollendet gebliebene Programm wieder aufnehmen, nämlich allgemein die Theorie der

linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, bez. die Theorie der automorphen Functionen erneut in Betracht ziehen. – Wie weit ich im Verlaufe der gegenwärtigen Vorlesung Neues werde bieten können, stehe dahin; immer hoffe ich, dass dies bezüglich der Realitätsdiscussionen der Fall ist. Es entstehen da eigentümliche Sätze, welche man mit den sonstigen Untersuchungen der Algebra über Wurzelrealität, also mit dem Sturm'schen Satze etc. in Verbindung wird setzen müssen.

Aus dem Gesagten geht bereits hervor, dass wir im Laufe der Vorlesung sehr verschiedenartige Gebiete der Mathematik werden berühren müssen, und dass wir also der Forderung unmöglich nachkommen können, die so vielfach erhoben wird, dass zusammenhängende mathematische Betrachtungen von einheitlicher Methode beherrscht sein sollen. Es ist interessant, zu bemerken, unter wie wechselnder Gestalt diese Forderung gerade innerhalb unseres Gebietes zur Geltung gebracht worden ist. Steiner wünschte die algebraischen Curven mit denselben synthetischen Mitteln untersucht, welche sich in der Theorie der Kegelschnitte erfolgreich gezeigt hatten, also durch die Mittel der projectiven Erzeugung etc. –

Clebsch verlangte eine consequente algebraische Behandlung im Anschluss an die Vorstellungsweisen der projectiven Geometrie. — Kronecker nimmt neuerdings die Methoden und die Begriffsbildungen der Zahlentheorie als Ausgangspunct. — Kein Zweifel, dass jeder einzelne dieser Ansätze seine gute Berechtigung hat, sofern es sich dabei um ein Arbeitsprogramm handelt. Indem wir die Benutzung bestimmter Hülfsmittel in den Vordergrund stellen, werden wir gezwungen, bestimmte Fragestellungen, die sonst der Beachtung entgehen, mit aller Sorgfalt durchzuarbeiten. Aber wenn es sich darum handeln soll, eine Übersicht über das Gesammtgebiet der algebraischen Gebilde und also eine Einsicht in den wechselweisen Zusammenhang seiner Teile zu erhalten, dann erscheint das Festhalten an der einzelnen derartigen Formulirung direct als schädlich. Jedenfalls soll die gegenwärtige Vorlesung einen ganz anderen Character tragen. — Wir werden unsere Leistung gerade darin suchen, den Gegenstand immer wieder unter neuen Gesichtspuncten zu sehen. Von der Potentialtheorie aus (die in die mathematische Physik gehört) schreiten wir zunächst zur Functionentheorie: den dort gefundenen Begriff der algebraischen Function nehmen wir dann als Maasstab, um die Theorie der algebraischen

Curven und der sonstigen algebraischen Gebilde, mit denen sich die Geometer beschäftigen, zu verstehen, aber dieser Vergleich hat seine rückwirkende Kraft: es zeigt sich, dass wir die functionentheoretische Entwickelung selbst weiter entwickeln müssen zu einer Theorie der Formen auf dem algebraischen Gebilde, wobei dann von selbst arithmetische Momente in den Vordergrund treten.

Erster Teil – Grundlegung der Riemann'schen Theorie.

Ich werde hier im Grossen und Ganzen denselben Gedankengang befolgen, den ich in meiner Schrift: Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. (Leipzig 1881, erschienen 1882) skizzirt habe. Indem ich auf letztere wegen der Einzelheiten hinweise, darf ich mich darauf beschränken, jetzt nur die Hauptmomente der Überlegung zu bezeichnen, bez. solche Ausführungen hinzuzufügen, die sich in der Schrift nicht finden. Wir beginnen dementsprechend damit, dass wir irgend welche im Raume gelegene geschlossene Fläche zu Grunde legen. Auf dieser Fläche (die wir dann eben als "Riemann'sche Fläche" bezeichnen) unterscheiden wir vorab gewisse Potentialfunctionen u. Zu jedem u gehört ein

„conjugirtes" Potential v, worauf $u + iv$ dasjenige ist, was wir als eine complexe Function auf der Fläche oder schlechtweg als eine Function auf der Fläche benennen. Unter ihnen sind besonders bemerkenswerte die eindeutigen Functionen: sie sind es, die wir als algebraische Functionen bezeichnen. Den Inbegriff aber der algebraischen Functionen, die solcherweise auf dem Substrat der Riemann'schen Fläche spriessen, bezeichnen wir als algebraisches Gebilde. Um die Verbindung mit dem gewöhnlichen Ansatze der Functionentheorie zu haben (bei dem es sich doch immer darum handelt, verschiedene Grössen von einander abhängig zu machen) brauchen wir nur die Werte $u + iv$ der verschiedenen auf einer Fläche existierenden algebraischen Functionen auf die Werte $u_0 + iv_0$, welche eine einzelne derselben bietet, zu beziehen. Die $(u + iv)$ erscheinen alsdann in der Tat als algebraische Functionen von $(u_0 + iv_0)$ im gewöhnlichen functionentheoretischen Sinne. Deutet man die Werte von $u_0 + iv_0$ in einer Ebene, so wird man, um den Verlauf der $u + iv$ zu characterisiren, über dieser Ebene eine gewöhnliche mehrblättrige Riemann'sche Fläche construiren können. Diese mehrblättrige Fläche ist einfach das Abbild unserer ursprünglichen Fläche, wie es durch die Wertverteilung,

die $u_z + i v_z$ über die ursprüngliche Fläche hin hat, festgelegt wird. — Es ist vielleicht nützlich, wenn ich auf die Unterschiede, die dieser Gedankengang den gewöhnlichen Darstellungen gegenüber bietet, noch ausdrücklich hinweise.

Die gewöhnlichen Darstellungen kann man dabei selbst noch in zwei Klassen zerteilen:

Die Darstellungen der ersten Art beginnen mit der algebraischen Gleichung $f(w, z) = 0$, construiren die complexen Werte von z in einer Ebene und suchen dann über dieser Ebene die mehrblättrige Riemann'sche Fläche, welche dem Verlaufe der Function $w(z)$ entspricht. Diese Fläche erscheint dann als ein Mittel sich über die Eigenschaften dieser Function, wie der weiteren, aus ihr ableitbaren zu orientiren, nicht aber als die eigentliche Definition des betr. Functionskreises. Damit ist Riemann's Grundgedanke doch nur unvollkommen wiedergegeben.

Die Darstellungen der zweiten Art beginnen damit, über der z – Ebene eine mehrblättrige Fläche zu construiren und auf ihr die Existenz gewisser Potentiale u und Functionen $u + i v$ nachzuweisen. Das ist also gerade wie bei uns, nur dass eine der zugehörigen algebraischen Functionen, nämlich z selbst

($= u_0 + i v_0$) von vornherein bekannt und für die ganze Darstellung ausgezeichnet ist! Dadurch treten Momente in den Vordergrund, die allerdings ihr besonderes Interesse besitzen und in der Tat fernerhin von uns besonders betrachtet werden sollen, die aber einem Erfassen der zunächst in Betracht kommenden Grundgedanken hinderlich sind: daß nämlich die verschiedenen $u + iv$ _neben_ einander auf der Fläche wachsen und daß unter ihnen keines mehr Recht hat als eine abhängige Variable zu Grunde gelegt zu werden als jedes andere auch. Die allgemeine Theorie erscheint bei einer solchen Darstellung sozusagen in einseitiger Projection.

Ich will übrigens wegen dieser beiden Darstellungsarten auf Kap. 1 und 2 des dritten Abschnitts von Bd. 1 der von Herrn _Fricke_ bearbeiteten _Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen_ verweisen. Es liegen dort besondere Verhältnisse vor, vermöge deren es gestattet schien, an der besonderen Form der mehrblättrig über eine x-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche festzuhalten. Unter den verschiedenen auf der Fläche existirenden algebraischen Functionen ist nämlich daselbst immer eine, die sogenannte, absolute In-

variante z, in der Tat a priori ausgezeichnet, daher dann die Fläche von vorneherein als über die z-Ebene gelegen angesehen wird.

Wir besprechen nun die einzelnen Momente unseres allgemeinen Gedankenganges.

I. Von der Existenz des Hauptpotentials u auf beliebig vorgegebener Riemann'scher Fläche.

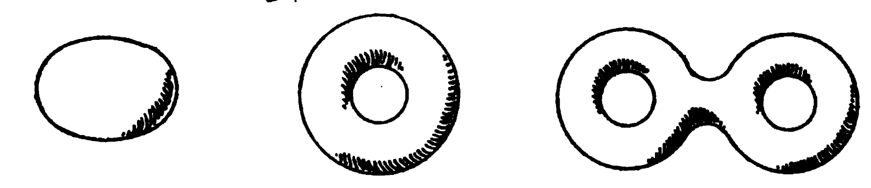
Wie in meiner Schrift werde ich die Existenz des bez. Potentials zunächst durch physikalische Betrachtungen plausibel machen, um erst dann die mathematischen Beweisgründe für den Existenzsatz zu geben, bez. die mathematischen Bedingungen zu entwickeln, unter denen er richtig ist.

A. Physikalische Betrachtung.

Wir denken uns die beliebig im Raume gegebene Riemann'sche Fläche gleichförmig mit leitender Masse belegt und betrachten auf dem solcherweise entstandenen Conductor stationäre electrische Strömungen. Insbesondere betrachten wir diejenige stationäre electrische Strömung, welche entsteht, wenn wir an irgend zwei Stellen unserer Fläche die beiden Polenden einer galvanischen Säule aufsetzen. —

Wir werden im Interesse dieser physikalischen Experimente der zunächst völlig beliebigen Riemann'

schen Fläche allerdings eine Bedingung auferlegen müssen, nämlich die, daß sie sich nirgends selbst durchsetzen soll. Wir denken uns die Fläche also jenachdem als ein einfaches Oval, als einen Ring, einen Doppelring:



Wir wollen aber vorweg bemerken, daß diese Beschränkung bei der mathematischen Betrachtung in keiner Weise aufrecht erhalten werden soll und aufrecht erhalten werden kann; insofern z. B. mehrblättrige Flächen über einer Ebene immer Selbstdurchsetzungen darbieten. Die Sache macht darum für die allgemeine Theorie keinen Unterschied, weil es bei derselben überhaupt nicht darauf ankommt, daß wir die „Riemann'sche Fläche", oder, wie wir dann lieber sagen, die „<u>zweidimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit</u>", im Raume von 3 Dimensionen gelegen denken, und uns dazu in diesem Raume gerade durch eine geschlossene von Punkten gebildete Fläche versinnlichen, während doch die Frage, ob Selbstdurchdringungen eintreten oder nicht, nur aus dieser partiku-

lären Art der geometrischen Vorstellungsweise entsteht. Näheres hierüber weiter unten. — Immer wird es gestattet sein, hier schon Einiges über die Classification der geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, und also unserer Flächen, nach der *Zahl p.* anzuführen. Ich will die einzelnen Bemerkungen numerieren.

1). Die Zahl p ist bekanntlich bei beliebiger stetig eindeutiger Transformation einer Fläche invariant, d. h. eine Invariante im Sinne der Analysis situs. Dass sie die einzige derartige Invariante geschlossener Flächen ist, d. h., dass die Gleichheit von p nicht nur die notwendige, sondern auch die ausreichende Bedingung für die Überführbarkeit zweier Flächen ineinander ist, findet sich bei Riemann selbst wohl nicht angegeben, obgleich nicht zu zweifeln ist, dass er den Satz gekannt hat. Über weitere Literatur sowie die verschiedenen Fragen, die hier anknüpfen, orientiren Sie sich am besten in den Arbeiten von *Dyck*: „Beiträge zur Analysis situs" in Bd. 32 und 35 der Math. Annalen (1888, 1890).

2.) Ich definire die Zahl p einer geschlossenen Fläche am liebsten als die *Maximalzahl der Rückkehrschnitte* (in sich selbst zurücklaufender Schnitt), welche man auf einer Fläche construiren kann, ohne dass die Fläche

dabei in Stücke zerfällt, — wobei natürlich bewiesen werden muß, daß man immer zu derselben Maximalzahl kommt, wie immer man die einzelnen Rückkehrschnitte auf der Fläche anordnen mag. — Riemann und die Mehrzahl der Autoren benutzen bei der Definition vielmehr <u>Querschnitte</u>, d. h. Schnitte, welche von einem bereits vorhandenen Begränzungspunkte der Fläche zu einem anderen Begränzungspunkte hinlaufen. Um bei einer geschlossenen Fläche überhaupt von derartigen Querschnitten sprechen zu können, muß man dieselbe vorab irgendwo mit einer kleineren Oeffnung, einer sog. „Punktirung" versehen. Riemann zeigt, daß man dann noch $2p$ Querschnitte gebraucht, um die Fläche in eine solche zu verwandeln, welche durch jeden weiteren Querschnitt in Stücke zerfällt, d. h. in eine einfach zusammenhängende Fläche zu verwandeln. Dementsprechend nennt er die Fläche eine $(2p+1)$-fach zusammenhängende. Nun würde aber jede weitere Punktirung der ursprünglichen Fläche, wie leicht zu sehen, den Zusammenhang derselben (d. h. den durch Riemann's Zählweise definirten Zusammenhang) um 1 erhöhen. Es scheint daher natürlich, auch die erste Punktirung als eine Operation vom Gewichte 1 in Rechnung zu stellen; und also nicht

$2p+1$, sondern $2p$, als Zusammenhangszahl der geschlossenen Fläche zu bezeichnen. Inzwischen sind die Vorschläge, welche *Schläfli* und ich in dieser Hinsicht gemacht haben (vergl. Annalen VII, 1874), nicht weiter beachtet worden. Um nicht mit mir selbst in Conflict zu kommen, habe ich daher schon lange die Gewohnheit angenommen, überhaupt nicht von einer „Zusammenhangszahl" $2p$ oder $2p+1$ zu sprechen, sondern nur noch von einer „Zahl" p.

3. Die beiden Definitionen der Zahl p sind „innere" Definitionen derselben, d. h. sie operiren nur mit der Fläche als solcher, sie treten nicht aus der Fläche in den dreifach ausgedehnten Raum hinaus, in dem wir die Fläche gelegen denken mögen. Es giebt aber nicht minder elegante „äussere" Definitionen derselben, z. B. durch die *Gesammtkrümmung* der Flächen. Vergl. die Entwickelungen von Dyck l. c., die sich an Ideenbildungen von *Kronecker* anschliessen.

Indem wir jetzt zur Betrachtung der auf der Fläche verlaufenden, stationären, electrischen Strömungen zurückkehren, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf das jeweils zugehörige electrische Potential.

Sind p, q irgendwelche Coordinaten auf der Fläche

und setzen wir das Quadrat des Bogenelementes
$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$
so genügt dieser Potential der partiellen Differentialgleichung 2ter Ordnung:

$$0 = \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial q} - G\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q},$$

und es zeigt sich, daß das Potential durch diese partielle Differentialgleichung und die Randbedingungen, welche aus dem jeweiligen physikalischen Experimente folgen, eindeutig bestimmt ist. Ich darf hier auf die Ausführungen Bezug nehmen, welche ich hierüber im zweiten Teile meiner Potentialvorlesung (Sommer 1888) gegeben habe. Der wesentliche Gedankenfortschritt, der hier vorliegt, ist der: *daß sich die Anschauungen, die wir über den Verlauf und die Bestimmtheit der electrischen Strömungen von physikalischer Seite haben, sich jetzt in ebensoviele Theoreme umsetzen über die Lösungen, welche die vorgenannte partielle Differentialgleichung auf unserer Fläche zuläßt.* Insbesondere erfahren wir aus der electrischen Strömung, die entsteht, wenn wir die beiden Pole einer galvanischen Säule an irgend zwei

Stellen der Fläche aufsetzen, die Existenz der sogenannten <u>Hauptpotentials der Fläche</u>:

$$H^{\xi,\eta}_{\xi',\eta'}$$

Hier sind ξ', η' die beiden Zuleitungsstellen, die logarithmische Unendlichkeitsstellen von H sind. Möge die Stromstärke insbesondere so regulirt sein, dass H in der Nähe von ξ' unendlich wird, wie $\log r'$ (unter r' die Entfernung von ξ' verstanden); in η' wird dasselbe dann unendlich, wie $-\log s'$ (unter s' die Entfernung von η' verstanden). Dadurch ist dann H bis auf eine additive Constante bestimmt. Um diese festzulegen, dient der Nullpunkt η, der dem H oben an zweiter Stelle als Index zugesetzt ist. Wir bedingen einfach, dass H für $\xi = \eta$ verschwinden soll. ξ ist natürlich der Name für den auf der Fläche veränderlichen Punkt. Es giebt übrigens eine Reihe von Sätzen, welche sich auf die Vertauschung der Punkte ξ, η, ξ', η' beziehen.

Es sind dies die folgenden:

Mi. 28.10.91

$$1) H^{\xi\eta}_{\xi'\eta'} = -H^{\eta\xi}_{\xi'\eta'}; \; 2) H^{\xi\eta}_{\xi'\eta'} = -H^{\xi\eta}_{\eta'\xi'}$$

sowie der sog. Satz von der Vertauschung von

„Parameter und Argument"

3). $H^{\xi\,\eta}_{\xi'\eta'} = H^{\xi'\eta'}_{\xi\,\eta}$

Dieser letztere Satz ist, wie in der genannten Vorlesung ausgeführt wird, dadurch zu gewinnen, daß man den in der gewöhnlichen Potentialtheorie bekannten „Green'schen Satz" auf unsere Potentiale überträgt, nachdem man vorher unsere Fläche durch geeignetes Querschnittssystem in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt hat. –

Ebenda wird dann noch aus $H^{\xi\,\eta}_{\xi'\eta'}$, indem man ξ' mit η' zusammenrücken läßt und gleichzeitig mit einer unendlich werdenden Constante multiplicirt, das Elementarpotential:

$$L^{\xi\,\eta}_{\xi'}$$

abgeleitet. Dasselbe hat statt der zwei logarithmischen Unstetigkeitspuncte von H einen „einfachen algebraischen" Unstetigkeitspunct, wo das Potential unstetig wird, wie $cb.\ \frac{\cos\varphi}{r}$ für $r=0$, unter cb eine geeignete Constante, unter φ den Winkel verstanden, der von einer bestimmten durch den Unstetigkeitspunct laufenden Richtung,

der „Axe der singulären Punkte" gezählt wird.

Der Übergang von A zu L ist ganz derselbe, wie der in der gewöhnlichen Potentialtheorie übliche vom Potential einer gewöhnlichen Massenpunktes zum Potential eines magnetischen Moleculs. Der Übergang kann natürlich auch so gewonnen werden, daß man A nach ξ' differentiirt; differentiiren wir nach ξ' wiederholt, so entstehen höhere Potentiale $\bar{L}_\xi$, $\bar{\bar{L}}_\xi$, etc. mit doppeltem, dreifachem, algebraischen Unstetigkeitspunkt.

Die so gewonnenen A, L, $\bar{L}$, $\bar{\bar{L}}$ sind nun sozusagen die Bausteine, aus denen man die allgemeinsten von uns auf der Fläche in Betracht zu ziehenden Potentiale sowie complexen Functionen zusammensetzt.

Wir verschieben das aber und geben vorab:

B. Mathematische Ergänzung.

Die physikalische Betrachtung, welche wir voraus stellten, hat jedenfalls sog. *heuristischen Werth*, d. h. sie läßt die Theoreme, welche wir erreichen wollen, in besonders übersichtlicher Form entstehen, so zwar daß man glauben könnte, sie selbst gefunden zu haben (wie denn die physikalische Betrachtung auch historisch genommen der

Anstoß zur Aufstellung der Theoreme *gegeben hat*). Aber sie macht einen *mathematischen Beweis* der Theoreme, wie überhaupt eine *mathematische Präcisirung* derselben nicht überflüssig. Ich will dies hier doch eingehender erläutern, damit in dieser Hinsicht gar keine Unklarheit bleibe.

Zunächst bemerke man, daß die Aufstellung unserer Theoreme an das physikalische Experiment nicht unmittelbar, sondern nur *vermöge eines Analogieschlusses* anknüpft. Wenn wir die electrische Strömung in einer Fläche durch eine partielle Differentialgleichung beschreiben, so ist das ja kein exactes Gegenbild dessen, was nach unseren heutigen physikalischen Überzeugungen in einer leitenden Fläche geschieht. Vielmehr handelt es sich den letzteren zufolge bei einer electrischen Strömung um einen discontinuirlichen Vorgang in einem molecular aufgebauten Medium. Der Gebrauch der partiellen Differentialgleichung (wie überhaupt die Annahme, daß es sich um die Strömung in einer „Fläche" handelt, d.h. in einem Körper, dessen Querdimension durchaus verschwindet) sind nur insofern gerechtfertigt, als die Erfahrung lehrt, daß in den einfacheren

Fällen, die wir mathematisch beherrschen können, die hieraus entstehenden Folgerungen mit den Ergebnissen des Experimentes experimentell übereinstimmen. *Daß aber die Übereinstimmung noch weiter reicht, insbesondere also, daß wir Sätze über die Integrale der partiellen Differentialgleichung in noch unbekannten Fällen derselben entnehmen können, ist in keiner Weise notwendig.* Es ist das, wie gesagt, nur ein *Analogieschluß*, wie er wohl dem naturwissenschaftlichen, nicht aber dem mathematischen Denken entspricht. —

Viel wichtiger aber erscheint mir an hiesiger Stelle hervorzuheben, daß die Größenvorstellungen mit denen man bei der physikalischen Aufstellung unserer Sätze operirt, überhaupt nicht denjenigen Grad der Präcision haben, der für das Substrat einer mathematischen Entwickelung notwendig ist. Es haftet das nicht an der physikalischen Doctrin, sondern überhaupt an unserer Raumanschauung. Ich habe da Überlegungen zu streifen, die ich zuerst 1873 in den Erlanger Berichten berührt habe (Über den Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve, abgedruckt Anna=

len 22) und auf die ich von anderer Seite in den Schlussbemerkungen meines neuesten Aufsatzes „Zur Nichteuklidischen Geometrie" (Ann. 37, 1890) eingegangen bin. Die Sache ist die, dass ich die naive Raumanschauung (mit der man operirt, wenn man von einer willkürlichen Curve oder Fläche spricht) überhaupt nicht für etwas Exactes halte. Das Exacte kommt in die Geometrie erst hinein, indem man für gewisse Curven und Flächen (die geraden Linien und Ebenen, bez. die Kreise und Kugeln) die Exactheit vermöge der sogenannten Axiome postulirt. Exact ist daraufhin jede Curve oder Fläche, deren Definition man an die Geraden und Ebenen etc. vermöge einer gesetzmässigen Erzeugung anknüpft. Es ist das ziemlich dasselbe, als wenn man sagt: jede Curve oder Fläche, deren Definition man durch eine Gleichung zwischen x, y, z giebt. Und in dem so gewonnenen exacten Gebiete giebt es dann Unterschiede, welche die naive Raumanschauung gar nicht kennt: die Unterscheidung stetiger Curven oder Flächen in analytische und solche, die es nicht sind, in differentiirbare und solche, welche gar keine, oder nur erste, oder nur erste und zweite, ... Differentialquotienten

haben. Bei unserer physikalischen Construction haben wir von derartigen Unterscheidungen überhaupt nicht gesprochen. Soll nun der Satz von der Existenz des Hauptpotentials $H_{\xi'\eta'}^{\xi\eta}$, unterschiedslos für alle hier unterschiedenen Flächenarten gelten oder nur für einige? Und für welche denn? Diese Frage, auf die wir von physikalischer Seite garnicht vorbereitet sind, zeigt deutlicher als Alles Andere, daß unser Existenztheorem der *mathematischen Präcisirung* bedarf, zunächst der Präcisirung in den Voraussetzungen, unter denen es gelten soll, dann natürlich auch der Präcisirungen beim Beweise. —

Können wir so den physikalischen Ansatz nicht als vollen Beweis unseres Existenzsatzes gelten lassen, so mögen wir den Existenzsatz selbst vorab über *die Prämissen hinaus*, die beim physikalischen Experimente nötig sind, noch *verallgemeinern.* Offenbar kann für die mathematische Geltung des Satzes in keiner Weise in Betracht kommen, daß wir gerade auf einer Fläche unseres Raumes operiren: das Wesentliche wird sein, daß es eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist.

Wir ersetzen also die Riemann'sche Fläche fortan

durch eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit, d. h. eine zweidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit, auf welcher irgendein definiter Differentialausdruck

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

vorgegeben ist. Ob diese Mannigfaltigkeit in einem Raume von 3 oder mehr Dimensionen gelegen ist oder unabhängig von jedem äusseren Raume gedacht ist, das ist uns dabei ganz gleichgültig. So oft es uns bequem ist, suchen wir uns für sie ein Bild im Raume von 3 Dimensionen, aber das braucht nicht gerade eine geschlossene Fläche zu sein und auch braucht das ds^2 nicht gerade das Quadrat des für die Fläche geltenden Bogenelementes vorzustellen, wie wir sogleich noch näher ausführen. Vorab haben wir unserer Mannigfaltigkeit, damit sie als Riemann'sche Mannigfaltigkeit überhaupt brauchbar sei, jedenfalls eine wesentliche Bedingung aufzuerlegen. Die Unterscheidung, um welche es sich dabei handelt, tritt schon bei den geschlossenen Flächen unseres Raumes auf, sofern wir Flächen zulassen, die sich selbst durchsetzen (was wir das vorige Mal), als wir das physikalische

Experiment anstellten, ausdrücklich ausgeschlossen haben). Solche Flächen können nämlich sogenannte *Doppelflächen* sein, d.h. Flächen, bei denen man zwischen den beiden Seiten der Fläche nicht scheiden kann, weil man so über die Fläche hinlaufen kann, daß man von der einen Seite auf die andere hinüber kommt. Diese Tatsache, welche zuerst von *Moebius* entdeckt worden ist *), finden Sie ausdrücklich u. A. in dem ersten der beiden Aufsätze von Dyck besprochen. Dieselbe betrifft die inneren Zusammenhangsverhältnisse der Fläche, nicht ihre Beziehungen zu einem umgebenden Raume. Denn sie kann dahin ausgesprochen werden, daß bei einer Doppelfläche eine kleine auf der Fläche gezeichnete und mit einem bestimmten Sinne versehene „Indicatrix" so über die Fläche hin verschoben werden kann, daß sie an ihren ursprünglichen Ort *mit umgekehrtem Drehsinne* zurückkommt. Eben darum aber überträgt sich die Unterscheidung zwischen Doppelflächen und einfachen Flächen auf zweidimensionale Mannigfaltigkeiten überhaupt, und wir müssen zu ihr bei der Definition des Wortes „Riemann'sche Mannigfaltigkeit" Stellung nehmen. Wir wollen ausdrücklich be-

*) Implicite ist dieselbe übrigens bereits in *v. Staudt's* Geometrie der Lage enthalten.

dingen, *daß unsere Riemann'schen Mannigfaltigkeiten keine Doppelmannigfaltigkeiten sein sollen*. Andernfalls würde Alles das, was wir fernerhin über Zerschneidung derselben etc. zu sagen haben, nicht ohne Weiteres zu brauchen sein, und es würde der ganze Existenzbeweis, den wir geben, hinfällig sein. — Wir erläutern jetzt verschiedene Möglichkeiten, eine solche Riemann'sche Mannigfaltigkeit in unserem dreidimensionalen Raume vorzustellen:*)

Soll dies durch eine geschlossene Fläche geschehen, so ist für die mathematische Vorstellung in keiner Weise hinderlich, wenn sich die Fläche selbst durchsetzt. Wir werden vielmehr Flächen, die sich selbst durchsetzen, hier um so mehr in Betracht ziehen wollen, als die gewöhnlichen über der $(x+iy)$-Ebene oder der $(x+iy)$-Kugel ausgebreiteten mehrblättrigen Flächen Selbstdurchsetzungen in ihren Verzweigungsschnitten immer darbieten.

Aber es kann dies ebensowohl durch offene Flächenstücke geschehen, deren Randcurven durch irgend welches Gesetz paarweise zusammengeordnet sind (so daß man, wenn man über das Flächenstück schreitend an die eine Randcurve gelangt, nun gleich

---

*) vergl. meinen Aufsatz in Bd. 21. der Math. Annalen (1882): Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie.

an der entsprechenden Stelle der zugeordneten Randcurve weiterzugehen hat). Derartige offene Flächenstücke bezeichne ich als Fundamentalbereiche (Riemann'sche Bereiche); ich darf daran erinnern, daß wir im vorigen Jahre von denselben wiederholten Gebrauch gemacht haben. –

Indem wir so die Riemann'sche Mannigfaltigkeit in unserem Raume deuten, denken wir uns das zugehörige ds^2 zunächst, so lange nicht ausdrücklich etwas Anderes festgesetzt wird, als das Quadrat des gewöhnlichen Bogenelementes der Fläche; wir bemerkten aber schon, daß garnichts im Wege steht auch irgend welchen anderen auf unseren Flächen durchaus definiten Differentialausdruck: $E dp^2 + 2F dp\, dq + G\, dq^2$ mit ds^2 zu bezeichnen, und es liegt sogar die Frage nahe, zu der wir später werden Stellung nehmen müssen, ob sich nicht noch eine gute Bedeutung für die von uns anzustellenden Betrachtungen ergeben wird, wenn dem ds^2 gestattet wird, für einzelne Teile der in Betracht kommenden Fläche indefinit zu sein?

Jedenfalls also haben wir im Raume von 3 Dimensionen sehr verschiedene Möglichkeiten, eine und dieselbe Riemann'sche Mannigfaltigkeit

zu denken. Jede dieser Möglichkeiten giebt uns so=
zusagen eine Erscheinungsform der eigentlich allein
in Betracht kommenden, ganz abstract zu den=
kenden Mannigfaltigkeit.

Im Allgemeinen ist es natürlich [Sa. 31.10.91.
bequem, bei der Annahme zu bleiben, ds^2 be=
deute das Quadrat des Bogenelementes: man
hat bei dieser Annahme für alle an ds^2 anknüp=
fenden Betrachtungen die bequeme Redeweise
der metrischen Geometrie zur Verfügung. –
Beachten wir jetzt, dass die partielle Differential=
gleichung des Potentials

$$\frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial q} - G\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q} = 0$$

nicht wechselt, wenn wir E, F, G mit irgend wel=
chem gemeinsamen Factor multipliciren, also
ds^2 durch $M.\,ds^2$ ersetzen. In abstracter Form
wird dies heissen: Bei der Definition des Poten=
tials kommt nicht sowohl die Differentialform
ds^2, sondern die Differentialgleichung $ds^2 = 0$
in Betracht. Indem wir aber ds die concrete
Bedeutung des Bogenelementes geben, dür=

sen wir den Satz so aussprechen: Zwei Flächen, welche eindeutig, conform aufeinander bezogen sind, tragen dieselben Potentiale, und sind also für unsere functionentheoretischen Zwecke gleichwertig.*) Man wähle nämlich die Coordinaten p, q auf den Flächen so, dass entsprechende Punkte der beiden Flächen die gleichen Coordinaten bekommen. Ist dann das Bogenelement der einen Fläche durch:

$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$ gegeben, so wird wegen der Conformität der Beziehung das Bogenelement der anderen Fläche der Formel: $ds'^2 = M\,(E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2)$ genügen müssen, unter M irgend einen Factor verstanden. Eine Function $U(p\,q)$ also, die der Differentialgleichung des Potentials auf der ersten Fläche genügt, genügt ebensowohl der Differentialgleichung des Potentials auf der anderen Fläche. –

Eben dieser Satz wird uns nunmehr gestatten, die Hauptfrage in Angriff zu nehmen und innerhalb gewisser Voraussetzungen zu erledigen: die Frage nämlich, wann eine mit einem

---

*) Einfaches Beispiel: zwei Flächen, die durch eine Inversion auf einander bezogen sind.

ds^2 ausgestattete geschlossene zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die keine Doppelmannigfaltigkeit ist, als Riemann'sche Mannigfaltigkeit brauchbar ist, d. h. wann man die Existenz zugehöriger Potentiale $\mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{L}$ beweisen kann. Wenn wir von den Betrachtungen absehen, die Prof. Schwarz in den Berliner Monatsberichten von 1870 (Ges. Abhandl. II, p. 167 ff) darüber giebt, wie man irgendwelche einfach zusammenhängende geschlossene Fläche eindeutig conform auf die Oberfläche einer Kugel übertragen kann, so finden wir in der Literatur die bezeichnete Frage nur für solche geschlossene Flächen behandelt, die mehrblättrig über der Ebene ausgebreitet sind. Insbesondere hat für letztere Flächen C. Neumann in der zweiten Auflage seiner Vorlesungen über Abel'sche Integrale eine zusammenhängende Darstellung gegeben, auf die dann Fricke in Bd. I der Modulfunctionen Bezug nimmt. Das Dirichlet'sche Princip, dessen sich Riemann ursprünglich für den hier zu führenden Beweis bedient hatte, ist hier ganz verlassen und durch die Combinationsmethoden ersetzt, welche von Schwarz und Neumann entdeckt

worden sind. Ich kann hier nicht ausführlich darstellen, weshalb man sich veranlasst gesehen hat, das Dirichlet'sche Princip durchaus fallen zu lassen; ich könnte übrigens diesethalb auf die Darstellung verweisen, welche ich im Winter 1887-88 von der Sachlage gegeben habe (Potential I). Dagegen muss ich die Hauptpunkte der Neumann'schen Entwickelung recapituliren:

1). Es wird vorausgesetzt, dass die mehrblättrige Fläche über der Ebene, die wir zu betrachten haben, nur aus einer endlichen Zahl von Blättern bestehe und nur eine endliche Zahl von Verzweigungspunkten aufweise.

2). Infolgedessen ist es möglich, die Fläche mit einer endlichen Zahl von Kreisscheiben dachziegelartig zu überdecken, d.h. so, dass jeder Punkt der Fläche im Innern wenigstens einer der Kreisscheiben gelegen ist.

3). Von diesen Kreisscheiben sind natürlich diejenigen, welche einen Verzweigungspunkt im Innern enthalten, mehrblättrig; dieselben lassen sich aber je durch eine Hülfsabbildung mit Leichtigkeit auf einfach überdeckte (schlichte) Kreisscheiben conform übertragen.

4). Nun beachte man, dass man für die schlichte Kreisscheibe die sogenannte Randwertaufgabe ohne Weiteres lösen kann, d.h. die Aufgabe, ein Potential zu bestimmen, welches im Innern der Kreisscheibe endlich und stetig, am Rande derselben vorgegebene Werte annimmt.

5). Fernerhin entwickelt man die sog. Combinationsmethode, vermöge deren man die Randaufgabe, von der schlichten Kreisscheibe beginnend für irgend welchen Bereich erledigen kann, welcher aus einer endlichen Zahl von Kreisscheiben dachziegelartig aufgebaut ist: Voraussetzung dabei ist nur, dass der bez. Bereich überhaupt noch einen Rand hat, also keine geschlossene Fläche vorstellt.

6). Endlich aber kann man auch zur geschlossenen Fläche übergehen, indem man nämlich für das auf dieser zu construirende Potential bestimmte Unstetigkeiten vorschreibt. – So entstehen dann auf der geschlossenen Fläche jenachdem das Hauptpotential H oder das Elementarpotential L. – In der Tat braucht man den hiermit skizzirten Beweisgang nur sorgfältig durchzudenken, um zu bemerken, dass derselbe auf beliebige Flächen oder Mannigfaltigkeiten ausgedehnt werden kann, und für diese den folgenden Satz liefert, durch welchen unsere Hauptfrage jedenfalls zu gutem Teile erledigt wird:

Eine zweidimensionale, geschlossene, mit einem Bogenelement ds^2 ausgestattete Mannigfaltigkeit (welche keine Doppelmannigfaltigkeit ist) ist jedenfalls dann als Riemann'sche Mannigfaltigkeit zu brauchen, wenn man sie mit einer endlichen Zahl von Bereichen dachziegelartig überdecken kann, deren jeder eindeutig und conform auf eine schlichte Kreisscheibe abgebildet werden kann. Wird aber die somit bezeichnete Bedingung umgekehrt auch notwendig sein, damit unsere Mannigfaltigkeit brauchbar sei? In dieser Hinsicht werden wir vorab sagen dürfen:

*Sicher ist für die Brauchbarkeit der Mannigfaltigkeit erforderlich,
daß man die Umgebung eines jeden ihrer Punkte conform auf eine
Kreisscheibe übertragen kann.* Sei nämlich u irgend ein Poten-
tial, welches in der Nähe des zu betrachtenden Punktes der Mannig-
faltigkeit stetig verläuft. Wir werden dann bald lernen, ein „conju-
girtes Potential" v zu construiren, welches seinerseits in der Nähe
des zu betrachtenden Punktes ebenfalls stetig sein wird.
Schreibt man jetzt $u + iv = x + iy$, so hat man damit eo ipso eine
conforme Abbildung der Umgebung unseres Punktes auf die xy-Ebene,
insbesondere also auch die Abbildung eines geeigneten Stückes der Um-
gebung auf die Fläche einer Kreisscheibe. Hiernach wird man eine
brauchbare Mannigfaltigkeit immer auch mit Bereichen, deren
jeder sich conform auf eine „Kreisscheibe" übertragen läßt,
„dachziegelartig" überdecken können. *Die Frage ist nun, ob
man zu diesem Zwecke mit einer endlichen Zahl von Berei-
chen reichen muß.* Und dies ist sicher nicht notwendig,
da man im Laufe functionentheoretischer Untersuchungen
sehr oft beispielsweise auf solche Riemann'sche Flächen
geführt wird, welche „unendlichblättrig" über der Ebene
ausgebreitet sind und dabei ganz gewiß als Definition
zugehöriger Functionen dienen können.
Die allgemeine Frage, nach der Brauchbarkeit einer
Mannigfaltigkeit reducirt sich hiernach auf folgende:
*Anzugeben, wann ein Aggregat unendlich vieler
(je auf eine Kreisscheibe abbildbarer) Bereiche brauchbar ist.*

Und diese Frage ist leider noch nicht beantwortet worden. Wir haben schon im vorigen Semester darauf hingewiesen, dass eine Bearbeitung derselben dringend wünschenswert wäre. Einstweilen aber müssen wir von der Möglichkeit, dass unendlich viele Bereiche zur Überdeckung der Mannigfaltigkeiten nötig sein können, absehen, und uns also auf diejenigen Mannigfaltigkeiten beschränken, bei denen man mit einer endlichen Zahl von Bereichen ausreicht.

Wollen wir jetzt fragen, für welche <u>Flächen des dreifach ausgedehnten Raumes</u> (um nicht von anderen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten zu reden) man die hiermit eingeführte Voraussetzung bis jetzt hat beweisen können. Ich muss mich dabei auf mündliche Mitteilungen von Herrn Prof. Schwarz beziehen, der seine hierauf bezüglichen, ausgedehnten Untersuchungen leider noch nicht publiciert hat:

1.) <u>Brauchbar sind alle geschlossenen Flächen eines endlichen p, welche durch eine einzige analytische Gleichung darstellbar sind, vorausgesetzt, dass keine höheren singulären</u>

Punkte auftreten. Diese „höheren singulären Punkte" sind dann auszuschliessen, weil man bis jetzt nicht einmal weiss, wie man die Coordinaten x, y, z eines Flächenpunktes in der Nähe einer beliebigen singulären Stelle in Reihen entwickeln kann, geschweige denn, dass man über die Abbildungen Angaben machen kann, durch welche die conforme Uebertragung der Umgebung der singulären Stelle auf eine Kreisscheibe gelingt.

2). Unsere geschlossene Fläche eines endlichen p, die keine höheren Singularitäten darbietet, darf auch aus einer endlichen Zahl verschiedener analytischer Stücke bestehen; nur ist dann anzunehmen, dass die Durchschnittscurve zweier aneinanderstossender Stücke keine Ecke darbietet und dass überhaupt nirgends mehr als zwei Stücke aneinanderstossen.

Beispielsweise lässt sich der Fall, wo drei ellipsoidische Stücke in einer Ecke zusammenstossen, bis jetzt nicht erledigen. —

Der Beweis des formulirten Satzes hat selbstverständlich vor allen Dingen zu zeigen, dass man auch bei einem Punkte der

Durchschnittscurve zweier aneinanderstossender Stücke die gesammte (hier sich auf die beiden Stücke verteilende) Umgebung conform auf eine Kreisscheibe übertragen kann; im Übrigen wird er auf 1). und wiederholte Anwendung der Combinationsmethode zurückkommen.

3). Endlich läßt sich der Beweis für eine beliebige geschlossene Fläche erbringen, die aus einer endlichen Zahl von ebenen oder sphärischen Flächenstücken besteht, also für beliebige ebene oder sphärische Polyeder. Der Beweis wird sich ganz besonders mit den Ecken der Polyeder zu beschäftigen haben. Selbstverständlich kann man alle Kugeln, die in einer Ecke zusammenstossen, durch eine Inversion in Ebenen verwandeln. Aber hierbei rückt die Ecke unendlich weit, und es will dann vor allen Dingen untersucht sein, wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn die Ebenen, welche in der unendlich fernen Ecke zusammenstossen, zum Teil oder alle einer festen Richtung parallel sein sollten. —

Ad. 1). müssen wir doch noch einen besonders wichtigen Fall zur Sprache bringen. Das ist der Fall der algebraischen Minimal-

<u>flächen</u>. Eine Minimalfläche läßt sich nämlich ohne Weiteres conform auf eine Kugel übertragen. Es geschieht dies nämlich durch die sogenannte „sphärische Abbildung", d. h. durch parallele Normalen. Ist dann die Minimalfläche algebraisch, so wird dabei die Kugel von den Bildpunkten nur einfach überdeckt, d. h. die Minimalfläche läßt sich conform eindeutig auf eine mit einer endlichen Zahl von Blättern überdeckte Kugelfläche übertragen. Zugleich sind diese Blätter untereinander nur durch eine endliche Zahl von Verzweigungspunkten verbunden. Daher kann man für diese mehrblättrige Fläche und also für die algebraische Minimalfläche immer zugehörige Potentiale construiren: <u>die algebraischen Minimalflächen sind also immer als Riemann'sche Flächen brauchbar.</u>

Das Merkwürdige hierbei ist, daß die zur Tage getretene Beziehung der Minimalfläche zur mehrfach überdeckten Kugelfläche auch umkehrbar ist. Es geht dies aus den sog. <u>Weierstraß'schen Formeln der Minimalflächentheorie</u> ohne Weiteres hervor: <u>man kann vermöge dieser Formeln</u>, wie wir bald noch ausführlicher sehen werden, <u>zu jeder über der Kugel</u>

mehrblättrig ausgebreiteten Fläche (mit einer endlichen Zahl von Verzweigungspunkten) unbegränzt viele algebraische Minimalflächen hinzuconstruiren, deren jede auf die mehrblättrige Fläche conform eindeutig bezogen ist. Eine beliebige dieser Minimalflächen kann man dann statt der mehrblättrigen Flächen bei functionentheoretischen Untersuchungen zu Grunde legen. Das ist Weierstraß' Vorschlag.

In meinen früheren Vorlesungen finden Sie ebenfalls vielfach die mehrblättrige Fläche durch eine frei im Raume verlaufende Fläche ersetzt. Aber das geschah da nur durch eine stetig-eindeutige Beziehung der beiden Flächen, d. h. durch eine Beziehung im Sinne der Analysis situs; daß man diese Beziehung zu einer conformen machen kann, so daß die Potentiale der mehrblättrigen Fläche in die gewöhnlichen Potentiale der Raumfläche übergehen, das ist es, was hier hinzukommt.

Mi. 4. 11. 91.

I. Synthetischer Aufbau weiterer zur Fläche gehöriger Potentiale und entsprechende Einführung einfachster zur Fläche gehöriger complexer Functionen.

Unter einer „Riemann'schen Fläche" schlechthin werde im Folgenden eine solche geschlossene Mannig-

faltigkeit verstanden, die einmal die früher aufgestellte Bedingung erfüllt, keine Doppelmannigfaltigkeit zu sein, und anderseits durch eine endliche Zahl von Bereichen „dachziegelartig" überdeckt werden kann, deren jeder sich auf die Fläche eines Kreises conform übertragen läßt. Auf einer solchen Fläche sind wir dann der Existenz der Potentiale H und L sicher, und können also nunmehr daran gehen, aus den H und L weitere Potentiale und schließlich complexe Functionen zusammenzusetzen. Der Gang, den ich dabei skizziere, ist von mir in Ann. 21 vorgeschlagen und auch von Hrn. Fricke in Bd. I der Modulfunctionen eingehalten worden. Vorher war man zum Teil bemüht gewesen, für die weiteren in Betracht kommenden Potentiale noch neue Existenzbeweise zu führen; vergl. meine Schrift von 1881, in welcher zu diesem Zwecke besondere experimentelle Anordnungen ersonnen werden, sowie den an mich gerichteten Brief von Schwarz, den ich in Bd. 21 der Annalen mitteile.

(Ges. Abh. von Schwarz, II, p. 303 ff.)

F). Aufbau der Potentiale

1. Vorbemerkung über die Unstetigkeiten der L, $\bar{L}$, ...

Wir haben oben aus H die Potentiale L_ξ, $\bar{L}_\xi$,

$\bar{\bar{L}}_\xi, \cdots$ hergestellt, welche je an einer einzigen Stelle einen Unstetigkeitspunkt besaßen, den wir einen algebraischen Unstetigkeitspunkt bez. von der Ordnung 1, 2 ··· nannten. Indem wir nun jetzt irgend welche Summe: $c L_\xi + \bar{c}\bar{L}_\xi + \bar{\bar{c}}\bar{\bar{L}}_\xi + \cdots$ ins Auge fassen, werden wir es mit einer Unstetigkeit in ξ zu tun haben, die als „Überlagerung" verschiedener algebraischer Unstetigkeiten erscheint. Wir nennen auch sie „algebraisch", sofern es sich bei unserer Summe nur um eine endliche Anzahl von Summanden handelt; andernfalls würden wir, wenn wir hier schon die Terminologie der Functionentheoretiker heranholen dürfen, einen wesentlichen, singulären Punkt vor uns haben. Da sei nun die Verabredung, daß wir fernerhin (sofern nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird) wesentlich singuläre Punkte ausschließen wollen! Nur aus praktischen Gründen, um unsere Untersuchungen nicht zu dehnen, und übrigens in Übereinstimmung mit Riemann und den sonstigen hier zunächst in Betracht kommenden Autoren.

2). Aufbau neuer Potentiale durch Aneinanderreihung unendlich vieler L_ξ..

Das „Elementarpotential" L_ξ verglichen wir schon oben mit dem Potential eines magnetischen Molecüls. In der Tat wollen wir betreffs des L_ξ nun gewisse Operationen vornehmen, welche in der Theorie des Magnetismus angewendet zu werden pflegen: <u>axiale</u> Aneinanderreihung, <u>transversale</u> Aneinanderreihung magnetischer Molecüle: Die erstere erzeugt den gewöhnlichen Linearmagneten mit seinen zwei in seinen Endpunkten gelegenen Polen: S →→→→→→→→→→ N. Die andere, welche durch folgende Figur erläutert sein soll: ergiebt zunächst (d. h. so lange wir die mit Molecülen besetzte Linie als unüberschreitbar betrachten) ein eindeutiges Potential, welches die Eigenschaft hat, auf der einen Seite der Linie um einen constanten Betrag C größer zu sein, als auf der anderen Seite.*/ Aber nun nehmen wir an, jene Linie könne beliebig oft überschritten werden. Dann erscheint unser eindeutiges Potential als der einzelne Zweig

---

*/ Die Erläuterung des Textes ist etwas ungenau, weil magnetische Molecüle nicht längs einer Linie, sondern einer <u>Fläche</u> transversal aneinander gereiht werden können: der Rand der Fläche wird dabei eine Wirbellinie des zugehörigen Raumpotentiales. Die Ausdrucksform des Textes ist so gewählt, daß die Übertragung auf die L_ξ ohne Weiteres bewerkstelligt werden kann.

eines unendlich vieldeutigen Potentials, welches bei jeder Überschreitung der Moleküllinie um C wächst, und für welches die beiden Endpunkte der Moleküllinie sogenannte Wirbelpunkte vorstellen. (Ist φ der von einem der Wirbelpunkte auslaufende Polarwinkel, so haben wir zur Darstellung des Potentials in seiner nächsten Nähe $c\varphi$; für den anderen Wirbelpunkt wird's $-c\varphi$; dabei ist $C = 2\pi c$).

Wir übertragen jetzt, wie gesagt, diese Konstruktionen, indem wir an Stelle der von den magnetischen Molekülen ausgehenden Potentiale entsprechende L_ξ setzen, also Integrale $\int L_\xi \, d\xi$ betrachten. Die axiale Aneinanderreihung führt dann einfach zu dem Hauptpotentiale $H_{\xi\eta}$ zurück; sie ist eben die inverse Operation zu dem Differentiationsprozess, durch den wir L aus H abgeleitet haben. *Die transversale Aneinanderreihung aber giebt etwas Neues, das Wirbelpotential $W_{\xi\eta}$.* Mögen wir die in diesem $W_{\xi\eta}$ noch unbestimmte, multiplicative Constante so normirt denken, dass sich W bei Annäherung an ξ, resp. η wie $\pm\varphi$ selbst verhält. Übrigens werden wir für das $W_{\xi\eta}$ mit Hülfe des Green'schen Satzes ganz ähnliche Vertauschungssätze beweisen können, wie oben für das H, Sätze, die sich in den Formeln

zusammenfassen:

$$W_{\xi\eta}^{xy} = -W_{\xi\eta}^{yx} = -W_{\eta\xi}^{xy} = W_{xy}^{\xi\eta}.$$

Mit diesem W kommt offenbar, insofern es ein unendlich vieldeutiges Potential, ein ganz neues Moment in unseren Ansatz hinein. Seine Vieldeutigkeit ist freilich sehr einfacher Art; man könnte sie additive Vieldeutigkeit nennen, weil sie darin ihren vollen Ausdruck findet, daß man zu jedem Werte von W ein beliebiges ganzzahliges Multiplum von $C = 2\pi c$ addiren darf. Daher sind die elektrischen Strömungen, welche dem Potential W auf unserer Fläche entsprechen, <u>eindeutig</u>.

Von hieraus erfahren wir jetzt den Begriff des <u>allgemeinsten</u> von uns auf der Fläche in's Auge zu fassenden Potentials. Was singuläre Punkte angeht, so sollen nur logarithmische Unstetigkeitspunkte auftreten dürfen (Quellpunkte), wie beim B, Wirbelpunkte, wie beim W, und algebraische Unstetigkeitspunkte von der unter 1) soeben näher bezeichneten Art. Die Vieldeutigkeit aber soll immer nur eine additive sein.

Ehe wir aber dieses allgemeinste Potential untersuchen, müssen wir noch, sofern $p > 0$ ist, eine

neue Gattung von Potentialen kennen lernen, die aus dem $\mathcal{L}\xi$ durch eine besondere Art transversaler Aneinanderreihung entstehen.

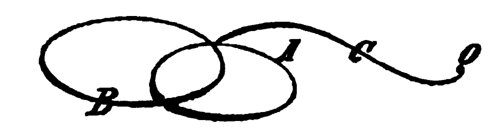
3). Die überall endlichen Potentiale u.

Dieselben entstehen, wenn man die Curve, längs deren die $\mathcal{L}\xi$ transversal aneinander gereiht werden, geschlossen in sich zurücklaufen läßt. Wir dürfen dabei die Curve nur nicht so wählen, daß unsere Riemann'sche Fläche, längs derselben zerschnitten, in zwei Stücke zerfiele. Dann würde man (wie durch den Green'schen Satz zu zeigen) einfach zwei constante Potentialwerte erhalten, von denen der eine auf dem einen, der andere auf dem anderen Stücke der Riemann'schen Fläche gelten würde. Eben deßhalb muß hier $p > 0$ vorausgesetzt werden. Wir können u natürlich noch mit einem solchen Factor multiplicieren, daß es bei Überschreitung der eben genannten Curve um einen beliebig vorzugebenen Periodicitätsmodul, z. B. um $\underline{1}$, zunimmt.

Versuchen wir jetzt vor allen Dingen, uns über die Mannigfaltigkeit der verschiedenen überall endlichen Potentiale u zu unterrichten, die auf unserer Riemann'schen Fläche existiren.

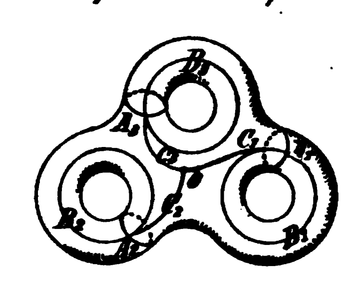
Ausgangspunkt sei dabei die Bemerkung, daß ein jedes u nötwendig eindeutig wird, sofern wir unsere Fläche irgendwie durch geeignete Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt haben, und wir den Verlauf der u nur innerhalb der geschlossenen Fläche studiren. Wir brauchen zu diesem Zwecke, wie wir wissen, 2p. Querschnitte, nachdem wir in die Fläche vorher an irgend welcher Stelle eine Oeffnung gemacht haben. Wollen wir doch gleich diejenige sog. <u>kanonische Zerschneidungsweise</u> definiren, von welcher man bei den vorliegenden Untersuchungen gewöhnlich Gebrauch macht.

Es sei A irgend eine auf der Fläche verlaufende geschlossene Curve, längs deren die Fläche zerschnitten nicht in Stücke zerfällt. Man kann dann zu A immer eine zweite geschlossene Curve B finden, welche A nur in einem Punkte überkreuzt.



Diesen Kreuzungspunkt verbinden wir jetzt mit einem beliebigen Punkte O der Fläche durch ein Verbindungsstück c. Nehmen wir dann an, es sei in O in die Fläche eine Oeffnung gemacht, so werden wir einerseits c + A, andererseits B als einen auf der Fläche verlaufenden Querschnitt ansehen können.

<u>Die kanonische Zerschneidung unserer Fläche</u> entsteht nun so, daß man von der Oeffnung O aus p Paare solcher Querschnitte c + A, B auslaufen läßt, wie die nebenstehende Figur für den Fall p = 3 aufweist.



Innerhalb der so zerschnittenen Fläche ist dann das einzelne überall endliche Potential natürlich eindeutig und bietet längs der einzelnen Bestandteile des Schnittsystems constante Wertdifferenzen (Periodicitätsmoduln) dar. Seien a_ν, b_ν die Wertdifferenzen, welche zu den Schnitten A_ν, B_ν gehören. Man überzeugt sich dann leicht, daß die a_ν, b_ν gewonnen werden können, indem man du längs B_ν, A_ν integrirt. Aber ebenso muß

die zu c_ν gehörige Differenz herauskommen, wenn man die längs $A_\nu B_\nu A_\nu^{-1} B_\nu^{-1}$ integrirt. Die zu c_ν gehörige Differenz ist daher einfach $= 0$. Eben darum lässt man die Verbindungsstücke c_ν häufig einfach fort und bezeichnet also den Inbegriff der A_ν, B_ν kurzweg als kanonisches Schnittsystem. Dies wird aber nur bei solchen Potentialen, bez. complexen Functionen gestattet sein, welche bei Durchlaufung irgend welcher geschlossener Wege immer solche Aenderungen erleiden, die commutative sind, denn nur unter Voraussetzung des commutativen Gesetzes wird der Weg $A B A^{-1} B^{-1}$ die Identität geben.

Sa. 7.11.1891 Ich sage nun, dass das einzelne Potential u durch die Wertdifferenzen

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_p, b_1, \ldots\ldots b_p$$

welche es an den Schnitten

$$A_1, A_2, \ldots\ldots A_p, B_1, \ldots\ldots B_p$$

darbietet bis auf eine Constante definirt ist. Hat man nämlich zwei überall endliche Potentiale u, u', welche die gleichen Wertdifferenzen darbieten, so wird $(u - u')$ ein überall endliches Potential sein, dessen sämmtliche Periodicitätsmoduln verschwinden. Von einem solchen aber

beweist man durch den Green'schen Satz, dass es einer Constanten gleich sein muss. –

Hieraufhin construire man nun 2p <u>Normalpotentiale u</u>, deren Periodicität durch folgendes Schema gegeben ist:

	A_1	. . . .	A_p	B_1	. . . .	B_p
u_1	1 0	....	0	0	....	0
u_2	0 1	....	0	0	....	0
u_p	0 0	....	1	0	....	0
u_{p+1}	0 0	....	0	1	....	0
u_{2p}	0 0	....	0	0	....	1 ;

es gelingt sofort, indem man das eine Mal die Curve A_1 transversal mit geeigneten Unstetigkeitsstellen besetzt, das zweite Mal die Curve A_2, etc. etc. Dann ist einerseits klar, dass man ein überall endliches Potential u construiren kann, welches an den A, B ganz beliebige Periodicitätsmoduln $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots b_p$ aufweist:

$$u = a_1 u_1 + \cdots a_p u_p + b_1 u_{p+1} + \cdots b_p u_{2p}$$

und andererseits, dass hiermit, sofern man noch

eine beliebige additive Constante hinzufügt, das allgemeinste überhaupt existirende überall endliche Potential construirt ist. – Hiermit ist die Frage nach der Mannigfaltigkeit der auf der Fläche existirenden überall endlichen Potentiale endgültig beantwortet. —

4). Von den allgemeinsten Potentialen, die wir auf unserer Fläche in Betracht ziehen.

Wir haben nunmehr alle Mittel, um gewisse allgemeinste Potentiale auf unserer Fläche aufzubauen. Mögen für ein solches Potential bezüglich der $A_1, \dots A_p, B_1, \dots B_p$ irgend welche Periodicitätsmoduln $a_1, \dots a_p, b_1, \dots\dots\dots b_p$ vorgegeben sein. Ferner eine Anzahl logarithmischer Unstetigkeitspunkte $\xi_1, \xi_2, \dots$, in denen das Potential unendlich werden soll, wie $c_1 \log r_1$, $c_2 \log r_2$, u. s. w. (wobei wir $\Sigma c_\nu = 0$ nehmen müssen, wie man durch physikalische Betrachtung oder durch den Green'schen Satz beweist). Dann eine Anzahl Wirbelpunkte $\xi_1', \xi_2', \dots$, in deren Nähe sich das Potential wie $c_1' \varphi_1', c_2' \varphi_2' \dots$ verhält, unter $\varphi_1', \varphi_2' \dots$ bezügliche Polarwinkel verstanden (wobei wieder $\Sigma c_\nu' = 0$ zu nehmen ist, wie sich ergiebt, wenn man sämmtliche ξ' auf der durch die

Schnitte c, d, B einfach zusammenhängend gemachten Fläche mit einer Curve umgeht). Endlich eine Anzahl algebraischer Unstetigkeitspunkte erster, zweiter ... Ordnung: $\xi_1'', \xi_2'', \dots; \xi_1''', \xi_2''', \dots$, in denen sich das Potential wie ein Multiplum von $\mathfrak{L}_{\xi_1''}, \mathfrak{L}_{\xi_2''}, \dots$, bez. $\bar{\mathfrak{L}}_{\xi_1'''}, \bar{\mathfrak{L}}_{\xi_2'''}, \dots$ verhält. Das Potential wird dann notwendig folgende Form haben:

$$a_1 u_1 + \dots a_p u_p + b_1 u_{p+1} + \dots b_p u_{2p} + \sum c_\nu H_{\xi_\nu \eta} + \sum c_\nu' W_{\xi_\nu' \eta'} + \sum c_\nu'' \mathfrak{L}_{\xi_\nu''} + \sum c_\nu''' \bar{\mathfrak{L}}_{\xi_\nu'''} + \dots + \text{constans}.$$

Dabei bedeuten die η, η' zwei Hülfspunkte, die nur der Symmetrie wegen eingeführt sind und ganz beliebig angenommen werden können; in der Tat sind diese η, η' nicht etwa singuläre Punkte des dargestellten Potentials; wegen $\sum c_\nu = 0, \sum c_\nu' = 0$ kommt alle Singularität, welche sie zu besitzen scheinen, tatsächlich in Wegfall.

5.) Schlussbemerkung des Green'schen Satzes.

Mit dem so gewonnenen Potential haben wir zugleich den Endpunkt der hier zunächst vorliegenden Entwickelung erreicht. Neue und sehr viel interessantere Resultate erhalten wir erst, indem wir den neuen Gedanken einführen, jedem Potential u ein anderes v zu conjugiren

und dann $u + iv$ als complexe Function auf der Fläche zu betrachten. –

Ich will hier nur zum Schlusse die Form noch angeben, welche der Green'sche Satz, auf den wir vorstehend verschiedentlich Bezug nehmen, bei Zugrundelegung der allgemeinen Form $ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$ annimmt (insofern diese Form nicht allgemein bekannt sein dürfte). Dieselbe lautet dann:

$$-\iint dp\,dq \begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial V}{\partial p} \\ F & G & \frac{\partial V}{\partial q} \\ \frac{\partial W}{\partial p} & \frac{\partial W}{\partial q} & 0 \end{vmatrix} = \int V \frac{\partial W}{\partial n}\,ds - \iint V \left\{ \frac{\partial \left(\frac{G\frac{\partial W}{\partial p} - F\frac{\partial W}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)}{\partial p} + \frac{\partial \left(\frac{E\frac{\partial W}{\partial q} - F\frac{\partial W}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)}{\partial q} \right\} dp\,dq$$

$$= \int W \frac{\partial V}{\partial n}\,ds - \iint V \left\{ \frac{\partial \ldots\ldots}{\partial p} + \frac{\partial \ldots\ldots}{\partial q} \right\} dp\,dq.$$

Hier sind V, W irgend zwei Functionen von p, q, die Doppelintegrale sind über irgend einen Bereich unserer Fläche, die einfachen Integrale über den Rand dieses Bereiches erstreckt. – Die gewöhnliche Form des Green'schen Satzes resultirt natürlich, indem man $E = G = 1$, $F = 0$ nimmt.

B.) Übergang zu den complexen Functionen.

Der Gedanke, durch den wir einem Potential U ein zweites, V, conjugiren, knüpft daran an, dass die partielle Differentialgleichung, der U genügt, und die wir folgendermassen schreiben können.

$$\frac{\partial T}{\partial p}+\frac{\partial K}{\partial q}=0,\ \text{wo}\ \begin{cases}T=G\frac{\partial u}{\partial p}-F\frac{\partial u}{\partial q}:\sqrt{EG-F^2},\\[4pt] K=E\frac{\partial u}{\partial q}-F\frac{\partial u}{\partial p}:\sqrt{EG-F^2}\end{cases}$$

die Form einer „Integrabilitätsbedingung" hat: die partielle Differentialgleichung zeigt, dass

$$-K.\,dp+T.\,dq.$$

ein exactes Differential ist. Wir schliessen, dass es eine Function V giebt, die den Bedingungen genügt:

$$-K=\frac{\partial V}{\partial p};\ T=\frac{\partial V}{\partial q}.$$

Für diese V berechnen wir ferner:

$$T'=\left(G\frac{\partial V}{\partial p}-F\frac{\partial V}{\partial q}\right):\sqrt{EG-F^2}=-\frac{\partial U}{\partial p},$$

$$K'=\left(E\frac{\partial V}{\partial q}-F\frac{\partial V}{\partial p}\right):\sqrt{EG-F^2}=\frac{\partial U}{\partial p}$$

woraus $\frac{\partial T'}{\partial p}+\frac{\partial K'}{\partial q}=0.$

V ist also selbst ein Potential, und es entsteht überdies −U ebenso aus dem V, wie V aus dem U. Diesem Sachverhältniss geben wir nun kurzen Ausdruck,

indem wir sagen, <u>V sei das zu U conjugirte Potential</u>. Aus U und V bilden wir dann aber die Combination $(U + iV)$ und bezeichnen dieselbe <u>als complexe Function auf der Fläche</u>.

Der Uebergang zur gewöhnlichen Functionentheorie gestaltet sich jetzt unmittelbar, indem wir annehmen, $p + iq$ sei selbst eine solche complexe Function (wir haben also von vornherein als Coordinaten p, q ein Paar conjugirte Potentiale gewählt). Es wird dann

$$\Pi = \frac{G}{\sqrt{EG - F^2}} = 1, \; K = -\frac{F}{\sqrt{EG - F^2}} = 0,$$

daher $E = G$, $F = 0$: <u>Unsere Annahme bringt mit sich, daß das Quadrat von ds durch eine Formel folgender Art gegeben ist: $ds^2 = E(dp^2 + dq^2)$</u> Nach der in der Flächentheorie üblichen Terminologie bezeichnet man diese Tatsache dadurch, daß man sagt: „die p, q bilden ein isometrisches Coordinatensystem der Fläche". Schreibt man andererseits $p + iq = x + iy$, wo die x, y rechtwinklige Coordinaten der Ebene sein sollen, bildet man also die Fläche so ab, daß jedem Puncte (p, q) der Fläche derjenige Punct (x, y) der Ebene zugeordnet wird, dessen $x = p$ und dessen $y = q$ ist, so ist dies

eine conforme Abbildung. Denn das für die Ebene geltende Bogenelement ds wird durch die Formel gegeben: $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dp^2 + dq^2$, ist also mit ds^2 einfach proportional. Durch jede einzelne auf ihr existirende complexe Function $p + iq$ wird also unsere Fläche conform auf die Ebene übertragen. Das ist ein Satz, den wir in der Folge noch sehr viel betrachten müssen. Wir sagen einstweilen vermöge desselben nur etwas über den infinitesimalen Character der Abbildung aus: später werden wir vielmehr darauf ausgehen uns über den Gesammtverlauf der betreffenden Abbildung zu unterrichten, wie er sich bei Zugrundelegung bestimmter Functionen $p + iq$ gestaltet (nachdem wir unsere Fläche vorher, um $p + iq$ auf ihr eindeutig zu machen, durch ein geeignetes Schnittnetz zerschnitten haben).

Doch sehen wir, welche Form die Theorie unserer Potentiale annimmt, wenn wir die Formel $ds^2 = \mathcal{E}(dp^2 + dq^2)$ an die Spitze stellen. Die partielle Differentialgleichung für u wird dann einfach:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = 0,$$

während andererseits der Zusammenhang zwischen u und v durch die Formeln gegeben ist:

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial v}{\partial q}, \quad \frac{\partial U}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial p}.$$

Aber dies sind genau die Formeln, durch welche man in den gewöhnlichen Darstellungen der Riemann'schen Theorie $(U+iV)$ als eine analytische Function der complexen Veränderlichen $(p+iq)$ definirt! Daher also der Hauptsatz, der den gesuchten Zusammenhang mit der gewöhnlichen Functionentheorie herstellt:

Betrachtet man irgend welche auf unserer Fläche existirende complexe Function (z. B. $p+iq$) als unabhängige Variable, so erweisen sich alle anderen complexen Functionen der Fläche als analytische Functionen dieser Variabelen (im Sinne der gewöhnlichen Functiontheorie)! Und der Unterschied gegen die gewöhnliche Functionentheorie ist nun der, der unmittelbar durch unseren Entwickelungsgang gegeben ist: daß hier von vornherein sämmtliche complexe Functionen der Fläche coordinirt erscheinen, und es uns ganz überlassen bleibt, welche von ihnen wir als unabhängige Variable wählen wollen, während die gewöhnliche Darstellung damit anfängt, eine unabhängige Variable an die Spitze zu stellen, und sich dann nur durch

eine etwas schwierige Abstraction zu der bei uns von selbst gegebenen Auffassung erhebt. –

Diesem Zusammenhange entspricht es, wie ich hier vorgreifend erwähnen will, daß wir diejenigen $u + iv$, welche auf unserer Fläche eindeutig sind, fernerhin als *algebraische Functionen der Fläche* bezeichnen, diejenigen aber, welche um Periodicitätsmoduln vieldeutig sind, als zugehörige *Integrale* (Abel'sche Integrale). Nimmt man nämlich eine der algebraischen Functionen als unabhängige Variable, so hängen die anderen algebraischen Functionen der Fläche von ihr in der Tat algebraisch ab (im Sinne der gewöhnlichen Functionentheorie), die anderen (die vieldeutigen) Functionen der Fläche erscheinen als Integrale algebraischer Functionen. *Der Inbegriff aller auf einer Fläche existirenden algebraischen Functionen, das ist gerade, was man ein eindimensionales (d.h. von einer complexen Variabelen abhängendes) algebraisches Gebilde nennt, und was nach den Angaben, die ich zu Beginn der Vorlesung gemacht habe, das eigentliche Object unserer*

ferneren Betrachtung sein wird.

Ich will den berührten Zusammenhang doch gleich noch nach einer anderen Seite ausführen. Aus dem eben angeführten Green'schen Satze folgt insbesondere für irgend zwei Potentiale unserer Fläche
$$\int\left(u\frac{\partial u'}{\partial n}-u'\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=0,$$
das Integral herumgeleitet um die Contour irgend welchen einfach zusammenhängenden Bereiches, innerhalb dessen die u, v beide eindeutig und stetig sind. Gehen wir nun von u, u' zu den zugehörigen complexen Functionen $u+iv$, $u'+iv'$ über, so kommt:
$$\int(u+iv)\cdot d(u'+iv')=0,$$
das Integral über dieselbe Contour, wie soeben hingeleitet. Das aber ist derselbe Satz, welcher für einfach zusammenhängende Bereiche der $(x+iy)$ Ebene seinerzeit von <u>Cauchy</u> aufgestellt wurde, und der in der gesammten Functionentheorie eine bekannte wichtige Rolle spielt. —

Wollen wir jetzt noch kurz die einfachsten Functionen aufzählen, welche wir vermöge unseres Ansatzes auf unserer Fläche erhalten,

diejenigen Functionen nämlich, die aus den Potentialen $\mathfrak{H}, \mathfrak{W}, \mathfrak{L}, \bar{\mathfrak{L}} \dots u$ entstehen.

Wir können dabei vorweg gewisse Sätze aufführen:

1). Wo U einen Unstetigkeitspunkt hat, da hat auch das conjugirte V einen singulären Punkt und umgekehrt.

2). Wo U einen Quellpunkt hat, hat V einen Wirbelpunkt und umgekehrt. Beide zusammen geben das, was wir einen logarithmischen Unstetigkeitspunkt von $U + iV$ nennen. Verhält sich $U + iV$ an irgend welcher Stelle, wie $C(\log r + i\varphi)$ unter C irgend welche, ev. complexe Constante verstanden, so sprechen wir immer von einem logarithmischen Unstetigkeitspunkt, u. C wird dessen logarithmisches Residuum genannt

3). Hat U einen algebraischen Unstetigkeitspunkt von irgend welcher Ordnung, so hat V eben dort einen algebraischen Unstetigkeitspunkt von derselben Ordnung. Die Singularität von $U + iV$ wird dann ebenfalls als algebraischer Unstetigkeitspunkt von der betr. Ordnung bezeichnet.

4). Ist U auf der Fläche eindeutig, so wird darum doch V im Allgemeinen (solange wir nicht U in besonderer Weise wählen) um Periodicitäts=

moduln vieldeutig sein. Denn V wird auf der Fläche durch Integration gewonnen.

$$V = \int(-K.dp + \Pi.dq),$$

und wenn wir diese Integration bis zu den beiden Ufern eines Querschnittes hinleiten, so ist zunächst gar kein Grund vorhanden, weshalb die zweierlei Werte, die wir da erhalten, übereinstimmen sollten.

Auf Grund dieser Sätze ergiebt sich nun:

1). $H_{\xi\eta} + iH'_{\xi\eta}$, ebenso wie $W_{\xi\eta} + iW'_{\xi\eta}$ sind complexe Functionen auf der Fläche mit zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkten ξ, η, deren logarithmische Residua bez. entgegengesetzt gleich sind, und im ersten Falle reell, im zweiten rein imaginär sind. Übrigens bieten beide Functionen an den kanonischen Querschnitten A, B rein imaginäre Periodicitätsmoduln dar.

Wir haben hier besondere Fälle der später sogenannten Integrale dritter Gattung vor uns.

2). $L_\xi + iL''_\xi$, $L_\xi + iL'_\xi$, ... sind complexe Functionen der Fläche, welche einen einzelnen algebraischen Unstetigkeitspunkt besitzen (von der ersten, zweiten, etc. Ordnung), außerdem aber an den Querschnitten A, B rein imaginäre Periodicitätsmoduln. Es sind das besondere Fälle von

<u>Integralen zweiter Gattung.</u>

3). Aus den Normalpotentialen $u_1, u_2, \dots u_{2p}$ entstehen sog. überall endliche Integrale oder Integrale erster Gattung. Das einzelne Integral wird natürlich nur an einem der Querschnitte A, B einen Periodicitätsmodul haben, der nicht rein imaginär ist, vielmehr den reellen Bestandteil 1 aufweist. In dem besonderen Falle, daß $p = 0$ ist, vereinfachen sich natürlich diese Functionen beträchtlich, weil die Querschnitte A, B. ganz fortfallen.

Die Integrale erster Gattung existiren dann überhaupt nicht, die Integrale zweiter Gattung werden eindeutige, d. h. algebraische Functionen der Fläche. <u>Dies ist aber auch, wohlverstanden, der einzige Fall, wo wir ohne Weiteres zu algebraischen Functionen der Fläche kommen.</u> Für $p > 0$ führt unser Ansatz zunächst nicht zu algebraischen, sondern zu Integralfunctionen, und zwar zu solchen, welche hinsichtlich der reellen Teile ihrer Periodicitätsmoduln particularisirt sind. Dieses ist einer der wesentlichen Charactere der Riemann'schen Theorie. Ich fasse denselben nicht so auf, als wären die Integralfunctionen auch für die systematische Behandlung der algebraischen Gebilde die einfachsten

Functionen. Das Ziel der Riemann'schen Theorie ist eben nicht (so wie ich sie verstehe) eine <u>systematische Behandlung</u> */ Ihr Ziel ist, durch eigenartigen Ansatz möglichst rasch gewisse Anschauungen und gewisse ihnen entsprechende Resultate zu erreichen, die man bei systematischer Discussion der algebraischen Gebilde bis jetzt nur schwer und zum Teil auch garnicht gewinnen kann. Über die Anordnung, die wir hinterher den gewonnenen Sätzen etc. geben wollen, ist damit noch gar Nichts festgesetzt. In der Tat werden wir mancherlei Einseitigkeit, welche der besondere Ansatz der Riemann'schen Theorie mit sich bringt, bald abstreifen. Dahin gehört die starke Betonung, welche die Trennung der Functionen in ihren reellen und ihren imaginären Bestandteil bislang erfuhr.

Dahin gehört aber namentlich Folgendes: Für die Integralfunctionen sind die Unendlichkeitsstellen etwas durchaus Wesentliches (weil der Wert ∞ beim Integriren, wie überhaupt beim Summiren, an sich singuläre Bedeutung hat), und es ist also durchaus sach-

---

*/ In der Tat sollte eine systematische Behandlung die algebraischen Gebilde beliebiger Dimensionenzahl umfassen; der Riemann'sche Ansatz aber ist, sofern nicht ganz neue Verallgemeinerungen getroffen werden, durchaus auf eindimensionale Gebilde beschränkt.

entsprechend, wenn wir die Integralfunctionen nach der Zahl und Art ihrer Unendlichkeitsstellen ordnen. Ganz anders aber ist es mit den algebraischen Functionen. Ist f eine solche Function, so ist nicht minder $\frac{1}{f-C}$ eine solche, unter C eine beliebige Constante verstanden. Die Punkte $f=\infty$ haben also für die Function keine tiefergehende Bedeutung als etwa die Punkte $f=C$. Nun werden wir aber bald lernen, algebraische Functionen aus Integralfunctionen additiv zusammenzusetzen. Dabei treten dann zuvörderst die Unendlichkeitspunkte der algebraischen Function naturgemäss in den Vordergrund. Aber das kann nur eine vorläufige Formulirung sein; wir werden hernach suchen müssen, die Bevorzugung gerade der Unendlichkeitspunkte wieder abzustreifen.

Diese Bemerkungen sollen uns nicht hindern den Riemannschen Gedankengang im folgenden so rein als möglich zur Geltung zu bringen. Daher beginnen wir jetzt, indem wir uns zur genaueren Discussion der auf der Fläche existirenden complexen Functionen hinwenden, nicht etwa mit der Construction der zugehörigen algebraischen Functionen, sondern mit der Betrachtung der zugehörigen Integrale. —

Sa. 14.11.91

C. Von den auf der Riemann'schen Fläche existirenden Integralen der ersten, zweiten und dritten Gattung.

1. Von der Normirung der Integrale erster Gattung

Wir haben oben $2p$ Normalpotentiale erster Gattung: $u_1, u_2, \dots u_{2p}$ eingeführt, welche an den Querschnitten A, B das einfache Periodicitätsverhalten zeigten, welches durch folgende Tabelle angegeben wird:

	A_1	…	A_p	B_1	…	B_p
u	1	…	0	0	…	0
u_p	0	…	1	0	…	0
u_{p+1}	0	…	0	1	…	0
u_{2p}	0	…	0	0	…	1

Construiren wir ihnen entsprechend $2p$ Normalintegrale erster Gattung:

$$w_1, w_2, \dots \dots w_{2p},$$

so gilt bei ihnen die vorstehende Tabelle für die reellen Teile der Periodicitätsmoduln, welche sie an den A, B darbieten. Infolgedessen werden diese $2p$ Integrale in dem

Sinne linear-unabhängig sein, als zwischen ihnen keine lineare Gleichung $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots c_{2p} w_{2p} = C$ mit reellen Coefficienten c bestehen kann. Andererseits werden sich alle anderen Integrale erster Gattung in der Gestalt darstellen lassen:

$$w = a_1 w_1 + \cdots a_p w_p + b_1 w_{p+1} + \cdots b_p w_{2p} + C,$$

unter $a_1 \ldots a_p, b_1 \ldots b_p$ wiederum reelle Constante verstanden. Beide Sätze zusammen ergeben das Theorem, daß das einzelne Integral w auf der Riemann'schen Fläche, sofern wir von einer additiven Constanten absehen, durch die reellen Teile der Periodicitätsmoduln characterisirt werden kann, die es an den A, B darbietet. Aber es ist eine ganz andere Art von Normirung, von der man beim Studium der zur Riemann'schen Fläche gehörigen Integrale gewöhnlich Gebrauch macht. Nicht lineare Gleichungen mit reellen Coefficienten, sondern mit irgend welchen complexen Coefficienten werden in Betracht gezogen. Man vergl. was den Uebergang angeht, die Auseinandersetzungen bei Fricke, p. 527 ff. Da zeigt sich dann:

1). daß man auf mannigfache Weise nunmehr p linear unabhängige Integrale $w_1, \dots w_p$ aussuchen kann (d. h. p Integrale, zwischen denen keine Relation $c_1 w_1 + \dots c_p w_p = C$. besteht, unter den c beliebige complexe Größen verstanden);

2). daß jedes andere Integral erster Gattung sich durch diese $w_1 \dots w_p$ linear ausdrückt:

$$w = c_1 w_1 + \dots c_p w_p + C.$$

3). daß bei keinem Integral erster Gattung, welches von einer Constanten verschieden ist, die p Periodicitätsmoduln erster Art, d. h. die p Periodicitätsmoduln, welche dasselbe an den $A_1, \dots A_p$ darbietet, verschwinden können. Sind die Periodicitätsmoduln, welche w_γ aus den $A_1, \dots A_p, B_1, \dots B_p$ besitzt, $a_{\gamma 1} \dots a_{\gamma p}$. $b_{\gamma 1} \dots b_{\gamma p}$, so kommt diese Behauptung darauf zurück, daß die Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1p} \\ a_{p1} \dots a_{pp} \end{vmatrix}$ jedenfalls einen von Null verschiedenen Wert hat. Diesen Sätzen 1). 2). 3) entsprechend werden nun die neuen Normalintegrale $j_1 \dots j_p$ in der Weise definirt, daß man ihre Periodicitätsmoduln erster Art möglichst einfach vorschreibt,

	A_1	A_2	A_p
j_1	1	0	0
j_2	0	1	0
j_p	0	0	1

nämlich so, wie im nebenstehenden Schema angegeben ist. Ihre Periodicitätsmoduln zweiter Art sind dann die Grössen, welche im weiteren Fortgange der Theorie als Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden:

	B_1	B_2		B_p
A_1	τ_{11}	τ_{12}	....	τ_{1p}
A_2	τ_{21}	τ_{22}	....	τ_{2p}
A_p	τ_{p1}	τ_{p2}	....	τ_{pp}

Bezüglich dieser $\tau_{\alpha\beta}$ müssen wir sofort gewisse Gleichungen und Ungleichungen, denen sie genügen, kennen lernen:

a) die Gleichungen erhält man, wenn man das Cauchy'sche Integral

$$\int j_\alpha \cdot dj_\beta = 0.$$

um die gesammte Contour der kanonisch zerschnittenen Riemann'schen Fläche herumleitet, d. h. je längs beider Ufer der A_ν, B_ν und der Verbindungsstücke c_ν. Letztere liefern dabei keinen Beitrag und können also unmittelbar fortgelassen werden. Erstere aber ergeben nach einigen Reductionen die Gleichungen:

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

b). Um die Ungleichungen zu finden, schreibe

man zunächst noch einmal den ursprünglichen Green'schen Satz unter der Voraussetzung an, daß die beiden in ihm vorkommenden Functionen V, W der p, q ein und demselben Potentiale u gleich seien. Wir erhalten:

$$\iint -dp \cdot dq \cdot \begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial u}{\partial p} \\ F & G & \frac{\partial u}{\partial q} \\ \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} & 0 \end{vmatrix} = \int u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

und schließen aus dem Umstande, daß alle unter dem Doppelintegral linker Hand stehenden Elemente positiv sind, daß auch die rechte Seite positiv sein muß. Ist u der reelle Teil von $u + iv$, so kann man dieser rechten Seite die aequivalente Form $\int u \frac{\partial v}{\partial s} ds = \int u\, dv$ erteilen. Den so erhaltenen Satz wende man auf irgend ein Integral erster Gattung $w = w' + iw''$ an, dessen Periodicitätsmoduln erster und zweiter Art folgendermaßen in ihre reellen und imaginären Bestandteile getrennt sein sollen: $a_\nu = a'_\nu + i a''_\nu$, $b_\nu = b'_\nu + i b''_\nu$. Wir finden dann nach einigen Reductionen, daß bei jedem Integral erster Gattung die Summe $\sum (a'_\nu b''_\nu - b'_\nu a''_\nu)$ positiv ist. Diesen Satz werden wir nun

endlich auf das Integral $\sum n_\alpha J_\alpha$ an, unter $n_\alpha \ldots n_\beta$ irgend welche reelle Constante verstanden. Wir setzen: $\tau_{\alpha\beta} = \tau'_{\alpha\beta} + i\,\tau''_{\alpha\beta}$.
und finden nach kurzer Umsetzung:

$$\sum n_\alpha\, n_\beta\, \tau''_{\alpha\beta} > 0;$$

die quadratische Form $\sum \tau_{\alpha\beta}\, n_\alpha\, n_\beta$ ist also eine positive Form. In dieser Aussage sind die Ungleichheiten, welche wir ableiten wollten, zusammengesetzt. –

2). Von der Normirung der Integrale dritter und zweiter Gattung.

Wir führen jetzt vorab die Betrachtung der Integrale dritter und zweiter Gattung bis zu demselben Punkte. Ich werde dabei von der Abkürzung Gebrauch machen, dass ich die complexe Function, die wir als unabhängige Variable zu Grunde legen wollen, kurz gerade so mit x bezeichne, wie die veränderliche Stelle der Riemann'schen Fläche, die wir in's Auge fassen wollen. Andrerseits ertheile ich dem Integral dritter Gattung wie früher wieder zwei Argumente x, y, so dass $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ verschwindet, wenn x mit y zusammenfällt, es ist das nur ein Mittel, das ein Integral sonst

vorhandene, willkürliche Constante zu fixiren, und wird weiterhin je nach Bedürfnis bei allen Integralen erster Gattung angewandt werden. Dieses $P_{\xi\,\eta}^{x\,y}$ wird nun, wenn x an ξ oder an η heranrückt, unendlich wie $c.\log.(x-\xi)$. bez. $-c.\log(x-\eta)$, unter c das logarithmische Residuum des Punktes ξ verstanden. Wir wollen uns P in Zukunft jedenfalls so normirt denken, daß c gleich 1 ist. Wollen wir weiter normiren, so werden wir dem P ein solches Aggregat der $J_1 \dots J_p$ hinzufügen, daß alle Periodicitätsmoduln erster Art verfallen. Das solcherweise normirte Integral nennen wir $\Pi_{\xi\,\eta}^{x\,y}$. Für dasselbe finden wir wieder wesentliche Eigenschaften, indem wir den Cauchy'schen Satz anwenden:

1). Wir beziehen das Integral $\int \Pi_{\xi\,\eta}^{x\,y}\, d\,\Pi_{\xi'\,\eta'}^{x\,y}$ auf diejenige Contour, welche von den beiderseitigen des Querschnittes A_ν, B_ν, C_ν und solcher 4 ergänzender Schnitte gebildet wird, die von dem Hülfspunkte O nach den Unstetigkeitsstellen ξ, η, ξ', η' hinlaufen. Solcherweise kommt $\Pi_{\xi\,\eta}^{\xi'\,\eta'} = \Pi_{\xi'\,\eta'}^{\xi\,\eta}$,

der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument.

2). Wir bilden uns andererseits in entsprechender Weise die Integrale $\int \Pi_{\xi\eta}^{xy}\, dj_{\alpha}^{xy}$ und finden das einfache Resultat, daß die Periodicitätsmoduln zweiter Art des Integrals Π die folgenden einfachen Werte haben:

$$\frac{B_1 \quad \ldots\ldots \quad B_2 \quad \ldots\ldots \quad B_p}{2i\pi j_1{}^{\xi\eta} \quad \ldots\ldots \quad 2i\pi j_2{}^{\xi\eta} \quad \ldots\ldots \quad 2i\pi j_p{}^{\xi\eta}}$$

Mi: 18.11.91.

Bemerken wir heute zunächst, daß die Formirung des Integrals dritter Gattung, die wir das vorige Mal trafen, bez. die Festsetzung, daß dasselbe an den Stellen ξ, η die logarithmischen Residuen ± 1 haben soll, von der Function $p + iq = x$, durch deren Wert wir die Lage des Punktes x festgelegt dachten, unabhängig ist. In der Tat hätten wir statt x irgend eine Function $x' = f(x)$ gewählt und also festgesetzt, das P resp. Π an den betreffenden Stellen unendlich werden soll, wie $\log(x' - \xi')$ bez. $-\log(x' - \eta')$, so würde das auf das Nämliche hinausgekommen sein. Zum Beweise denke man sich $x' - \xi'$ nach Potenzen von $x - \xi$ entwickelt $= a(x - \xi) + b(x - \xi)^2 + \ldots\ldots$

Dann erscheint $\log(x' - \xi')$ in der Form $\log(x - \xi) + \log[a + b(x - \xi) + \ldots]$, und liefert also durch

$\log(x-\xi)$ dividirt für $x=\xi$ den Limes 1, – den einzigen, singulären Fall abgesehen, daß a verschwinden sollte, was eine ganz besondere Wahl der Functionen x' bedeuten würde, die wir hier nicht weiter in Betracht ziehen. Übrigens kann man ja auch das Verhalten der Functionen P resp. Π bei $x=\xi, \eta$ ohne jede Bezugnahme auf irgend welche Function $p+iq$ der Fläche dahin characterisiren: daß P und Π um $\pm 2\pi i$ wachsen, wenn das ξ, bez. η im positiven Sinne umkreist.

Wir mußten dies vorausschicken, um auf das abweichende Verhalten der Integrale zweiter Gattung vorzubereiten. Wir definiren die letzteren, indem wir $P_\xi^{x\,y}$, bez. $\Pi_\xi^{x\,y}$ nach der Unstetigkeitsstelle ξ differentiiren:

$$Y_\xi^{x\,y} = \frac{dP}{d\xi}, \quad \mathrm{Y}_\xi^{x\,y} = \frac{d\Pi}{d\xi}$$

(wo Y das „transcendent normirte" Integral zweiter Gattung sein wird). Hier wird sich die Definition ändern, wenn wir statt der Function $p+iq$, die an der Unstetigkeitsstelle den Wert ξ annimmt, $\xi' = f(\xi)$ einführen wollen. Wir erhalten dann einfach:

$$Y' = \frac{dP}{d\xi'} = \frac{dP}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{d\xi'} = \frac{dP}{d\xi}\cdot\frac{1}{f'(}$$

Hier ist $\frac{1}{\Pi(\xi)}$ irgendwelche Function von ξ, die wir ganz beliebig auswählen können. Daher: $y_\xi^{x\,y}$ ist, so lange wir nicht die Function angeben, die wir bei der Differentiation des Π benutzen wollen, nur erst bis auf einen Factor bestimmt, der eine willkürliche Function der Unstetigkeitsstelle ξ vorstellt.

Dasselbe gilt natürlich für $Y_\xi^{x\,y}$ und tritt auch hervor, wenn wir die Periodicitätsmoduln anschreiben, welche dasselbe an den Querschnitten A, B besitzt. Aus der Tabelle der Periodicitätsmoduln des Π erhalten wir nämlich für die des Y:

$Y_\xi^{x\,y}$	$A_1 \cdots\cdots A_p$	$B_1 \cdots\cdots B_p$
	$0 \cdots\cdots 0$	$2i\pi \frac{dj_1}{d\xi} \cdots 2i\pi \frac{dj_p}{d\xi}$

Beiläufig bemerken wir jetzt noch, daß wir aus y, bez. Y höhere Integrale zweiter Gattung $\bar{y}_\xi$, $\bar{\bar{y}}_\xi$, .. ableiten (für die ξ ein Unstetigkeitspunkt zweiter, dritter, ... Ordnung ist), indem wir wiederholt nach ξ differentiiren. Diese höheren Integrale werden wir übrigens im Folgenden nur bei besonderen Gelegenheiten heranholen, indem wir im Allgemeinen dem Leser überlaßen, sich

selbst zurechtzulegen, was geschieht, wenn mehrere algebraische Unstetigkeitspunkte erster Ordnung verschmelzen.

3). Genaueres Eingehen auf den Gesammtverlauf der Integrale erster Gattung.

Wir werden jetzt bei den Integralen erster Gattung eine Untersuchung durchführen, die besonders geeignet scheint, in die Natur dieser Functionen einen Einblick zu eröffnen. Auf der durch die kanonischen Schnitte A_ν, B_ν zerschnittenen Riemann'schen Fläche sind, wie wir wissen, die Integrale w eindeutig. Wir werden nun die eindeutige Abbildung betrachten, welche die w von der zerschnittenen Fläche auf der x, y-Ebene entwerfen, indem man $w = x + iy$ setzt. Dieselbe Fragestellung können wir natürlich immer aufwerfen, wenn uns irgend welche complexe Function auf der Riemann'schen Fläche gegeben ist; nur müssen wir vorher Sorge tragen, die Riemann'sche Fläche so zu zerschneiden, daß die Function auf ihr eindeutig wird. In der Tat werden wir die gleiche Frage für die Integrale dritter und zweiter Gattung bald aufnehmen und später auch für die algebraischen Functionen der Riemann'schen Fläche erlauben, bei denen wir dann gar keine Zerschneidung brauchen, weil

sie es ihr auf der Riemann'schen Fläche eindeutig sind. Jetzt kehren wir zu den Integralen erster Gattung zurück. Zweierlei werden wir über die Abbildungsfigur von vornherein aussagen können:

1). daß sie eine p fach zusammenhängende Fläche mit p Randcurven darstellt. Denn eine solche liegt ja in der durch A_ν, B_ν zerschnittenen Riemann'schen Fläche vor.

2). daß sie sich nirgends in's Unendliche zieht. Denn bei den w ist ja das Unendlichwerden an sich ausgeschlossen.

Ferner werden wir sagen, daß die Abbildung in der Umgebung einer beliebigen Stelle conform sei. – Inzwischen sind hier besondere Punkte der Fläche als Ausnahmepunkte anzusehen. Im Allgemeinen wird durch einen Punkt der Fläche für $w = x + iy$ nur eine Curve $y = C$ nach Maaßgabe der nebenstehenden Figur hindurchlaufen. Aber es giebt besondere Punkte der Fläche in denen (wenn wir noch höhere Vorkommnisse ausschließen) zwei Curven x und zwei Curven y zusammenstoßen. Es sind dies die Punkte, die ich

bei früheren Gelegenheiten als „Kreuzungspunkte" oder auch schlechtweg als „merkwürdige Punkte" der in Betracht zu ziehenden Function, hier als des w bezeichnet habe. In ihnen ist $dx = 0$, $dy = 0$ und also $dw = 0$, bei beliebigem Fortschreiten auf der Fläche. Es würde auch noch $d^2w = 0$, $d^3w = 0$ .., sein, wenn nicht zwei, sondern drei, vier, ... Curvenzüge $x = C$, bez. $y = C$ im Punkte zusammenliefen; in solchen Möglichkeiten bestehen die höheren Vorkommnisse, auf die wir soeben bereits hinwiesen, und die wir in der Folge zumeist bei Seite lassen wollen.

In der Umgebung einer solchen Stelle ist nun die Abbildung *keine conforme*, vielmehr finden sich die Winkel, die von einer solchen Stelle aus auf der Riemann'schen Fläche auslaufen, auf der $(x+iy)$ Ebene verdoppelt (bez. *verdreifacht etc.*) vor. Die in Rede stehenden Stellen $dw = 0$ ergeben daher für die über der $(x+iy)$-Ebene gelegenen Abbildung *Verzweigungspunkte*, in denen *zwei* (oder im besonderen Falle drei, vier ...) *Blätter der Abbildung zusammenhängen*. Ich werde die Zahl dieser besonderen Stellen, die beim Integral erster Gattung w auftreten, vorab v nennen.

Die Bestimmung dieser Zahl ν ist natürlich eine Hauptaufgabe der vorliegenden Theorie.

So. 21.11.91.

Unter einem parallelogrammatischen Rahmen verstehen wir einen aus 4 Stücken A^-, B^-, A^+, B^+ bestehenden Linienzug, der so beschaffen ist, dass A^+ aus A^- und B^+ aus B^- durch Parallelverschiebung hervorgeht. Als Parallelogramm bezeichnen wir dann eine Membran, welche in diesen Rahmen eingespannt ist. Im Allgemeinen wird es bequem sein, sich den parallelogrammatischen Rahmen als von 4 Geraden gebildet vorzustellen, und man kann im Falle unserer Abbildung in der Tat sehr häufig zu der hiermit bezeichneten Normalgestalt übergehen, was dann darauf hinauskommt, die Querschnittpaare A, B auf der Riemann'schen Fläche in zweckmässiger Gestalt zu wählen. Inzwischen ist dies keineswegs immer möglich, wie Beispiele, die sofort angeführt werden sollen, zeigen. Wie dem auch sei, jedenfalls ist aus der Periodicität des Integrals w klar, dass die durch w vermittelte Abbildung der zerschnittenen Riemann'schen Fläche in p parallelogrammatische Rahmen A_α^- B_α^- A_α^+ B_α^+ mit ν Verzweigungspunkten

eingespannt ist, oder anders ausgedrückt: *daß die Abbildung aus p übereinandergelagerten einfachen Parallelogrammen besteht, welche durch v Verzweigungspunkte aneinander befestigt sind.* Die Verschiebungsgrößen $a_\alpha = a'_\alpha + i a''_\alpha$, $b_\alpha = b'_\alpha + i b''_\alpha$, durch welche bez. die A_α^+, B_α^+ aus den A_α^-, B_α^- hervorgehen, sind dabei nichts Anderes als die zu den Querschnitten A_α, B_α gehörigen Perioden unseres w.

Nehmen wir zunächst $p = 1$, so haben wir nur einen parallelogrammatischen Rahmen (den wir gerne geradlinig zeichnen können), und die in diesen Rahmen einzuspannende Abbildung trägt natürlich *keinen* Verzweigungspunkt, so daß hier $v = 0$ ist. *Diese Tatsache, daß sich die Fläche $p = 1$ vermöge des einen ihr zugehörigen überall endlichen Integrals auf ein schlichtes Parallelogramm überträgt, bildet die Grundlage für die Beziehung, in welcher die Theorie der bei $p = 1$ existirenden Functionen zur Theorie der eindeutigen doppeltperiodischen Functionen steht.*

Nehmen wir ferner $p = 2$. Um zwei übereinandergelegte Parallelogramme wie sie die nebenstehende Figur aufweist:

zu einem zusammenhängenden Ganzen zu verbinden, braucht man mindestens zwei Verzweigungspunkte. Andererseits kann die Zahl dieser Verzweigungspunkte aber auch nicht grösser sein. Denn sonst würde die entstehende Gesammtfigur nicht den Zusammenhang $p = 2$ haben, wie die zerschnittene Riemann'sche Fläche. Daher ist hier also $\nu = 2$, und bei beliebigem p, indem man p Parallelogramme übereinander schichtet, auf Grund der entsprechenden Ueberlegung $\nu = 2p - 2$.

Immer darf man die Bedeutung der Figuren, die man sich so für $p > 1$ herstellt, nicht überschätzen. Sie geben zunächst nur Beispiele. Die Figuren können, jenachdem man die $A_2\, B_2$ auf der Riemann'schen Fläche wählt, ganz verschieden aussehen. Bleiben wir zum Beispiel bei $p = 2$, legen aber B_2 durch die beiden Kreuzungspunkte von w (die beiden Punkte $dw = 0$) auf der Fläche hindurch. In der Abbildung wird dann sowohl B_2^-, als B_2^+ zwei Rückkehrpunkte darbieten. Da kann dann beispielsweise folgende Figur entstehen, (die man wohl

am einfachsten als „Differenz" zweier Parallelogramme bezeichnen könnte). Diese wieder kann sich so modificiren, daß die beiden Gränzlinien A_2^-, A_2^+ zusammenrücken, oder auch so, daß sie übereinander geschoben erscheinen:

Alle diese Möglichkeiten existiren, wohlverstanden, wirklich. Denn man kann umgekehrt jede derartige Figur, indem man die zusammengehörigen Ränder vereinigt denkt, als Fundamentalbereich, d. h. selber als Riemann'sche Fläche gelten lassen, auf der dann $x + iy$ von selbst ein überall endliches Integral vorstellt: eine Auffassungsweise, auf die wir bald zurückkommen werden.

Demgegenüber erscheint es als eine wichtige Aufgabe: sich die Gesammtheit der hier möglichen Figuren deutlich zu machen. Kein Zweifel, daß hieraus wieder neue Sätze über das Verhalten der Integrale w auf der Riemann'schen Fläche hervorgehen würden. Ich darf daran erinnern,

welche Förderung die Theorie der „hypergeometrischen" Function erfährt, indem man die wirkliche Gestalt eines durch seine Winkel gegebenen Kreisbogendreiecks bestimmt, wie von da aus sich sofort die merkwürdigsten Realitätstheoreme etc. ergeben. Aehnlich muss es hier sein, und ich nehme insbesondere in Aussicht, später von diesem Gedanken Anwendung auf die Realitätsfragen zu machen, die bei den symmetrischen Riemannschen Flächen auftreten.

Übrigens wird es der grossen Unbestimmtheit unserer Figuren gegenüber erwünscht sein, noch eine andere Bestimmungsweise der Zahl $v = 2p - 2$ zu haben. Eine solche ergiebt sich einfach, wenn man auf der unzerschnittenen Riemann'schen Fläche die überall endliche Strömung betrachtet, die z. B. zum reellen Teile von $w = u + iv$ gehört. Es zeigt sich, dass bei jeder solchen Strömung in der Tat $2p - 2$ Kreuzungspunkte auftreten müssen. Vergleiche allgemeinere Betrachtungen dieser Art in meiner Schrift über Riemann, sowie bei Poincaré und Dyck (insbesondere Dyck, Ann. 32, p. 501, wo die näheren Citate gegeben sind). Interessant ist auch die Deutung, welche die früher gefundene Ungleichung zwischen den Perioden a_2, b_2 von w

jetzt erfährt. Dieselbe fand in der Doppelformel:

$$\iint - \begin{vmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \frac{\partial w}{\partial p} \\ \mathfrak{F} & \mathfrak{G} & \frac{\partial w}{\partial q} \\ \frac{\partial w}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial q} & 0 \end{vmatrix} dp\,dq = \sum_1^p (a_\alpha' b_\alpha'' - a_\alpha'' b_\alpha') > 0$$

ihren Ausdruck. Da erkennt man nun leicht, daß sich das Element des Doppelintegrals auf das Flächenelement der durch w vermittelten Abbildung bezieht: <u>das Doppelintegral selbst ist einfach der Gesammtflächeninhalt der Abbildung</u>. Der einzelne Summand $(a'b'' - a''b')$ aber stellt in leicht erkennbarer Weise den Inhalt eines Parallelogramms (a, b) vor; <u>der Gesammtflächeninhalt erscheint also</u>, wie es sein muß, <u>als Summe</u> (genauer gesagt: als algebraische Summe) <u>von p Parallelogrammen</u>. Und hiermit ist von selbst gegeben, daß besagte Summe > 0 sein muß. –

Ich habe mir noch die Aufgabe gestellt, Figuren zu zeichnen, welche unseren verschiedenen <u>Normalintegralen</u> erster Gattung entsprechen mögen.

Zunächst, was die Normalintegrale j angeht, bei denen (sofern wir $p = 2$ nehmen) jedesmal einer der Periodicitätsmoduln a_α verschwindet,

so kommt man bei ihnen notwendig zu einer solchen Figur, wie wir deren eine schon auf p 76 kennen lernten; ich setze dieselbe noch einmal hierher, indem ich jetzt, um alle überflüssigen Linien zu vermeiden, die Stücke A_2^-, A_2^+ kurzweg fortlasse, so dass das Parallelogramm $A_1^- B_1^- A_1^+ B_1^+$ einfach dem Schnitte B_2 entsprechend zwei Schlitze trägt:

Schwieriger sind die Figuren für die $w_1 \dots w_{2p}$, die zu den früher betrachteten „Normalpotentialen" $u_1 \dots u_{2p}$ gehören. Bei einem derartigen w waren alle Perioden bis auf eine rein imaginär. Nehmen wir $p = 2$ und das zu u gehörige w, so finden wir, indem wir wieder den Schnitt B_2 auf der Riemann'schen Fläche durch die beiden zugehörigen Kreuzungspunkte hindurchlegen, etwa folgende Figur:

(Dies ist die Figur, von der schon oben andeutungsweise die Rede war, insofern es bei ihr unmöglich scheint das Parallelogramm:
$A_2^- B_2^- A_2^+ B_2^+$

geradlinig abzugränzen). –

Wir benutzen endlich diese Figuren, um aus ihnen, mit Riemann, eine Folgerung zu ziehen die besonders wichtig ist. Riemann'sche Flächen mit $p = 0$ lassen sich immer eindeutig auf einander conform abbilden, wie wir noch sehen werden, so dass jede Fläche mit $p = 0$ für unsere Zwecke ebenso gut ist wie jede andere auch.

Aber bei $p = 1$ ist das, wie aus der Theorie der elliptischen Function folgt, ganz gewiss nicht so. Vielmehr enthält jede Normalform, die man bei Betrachtung der elliptischen Gebilde zu Grunde legen mag, eine wesentliche Constante, die auf keine Weise zu beseitigen ist: die Legendre'sche Normalform enthält ihren „Modul", die Weierstrass'sche Normalform die „absolute Invariante" g_2^3/g_3^2.

Es tritt dies auch dadurch hervor, dass das Parallelogramm der w Ebene zwar beliebig gedreht, vergrössert und verschoben werden kann, indem man w mit irgendwelchen complexen Constanten multiplicirt oder um eine solche Constante vermehrt. (wodurch es nicht aufhört, ein zur Riemann'schen Fläche gehöriges überall endliches Integral zu sein), dass dabei aber das

Verhältniss a : b seiner beiden Seiten durchaus ungeändert bleibt. Man bezeichnet diese Tatsachen zusammenfassend dahin, dass man sagt: Die Flächen $p = 1$ haben einen Modul. Wie nun wird sich die entsprechende Theorie für $p > 1$ gestalten? In dieser Hinsicht hat Riemann in No 12 seiner Abel'schen Functionen eben aus den hier von uns besprochenen Figuren den Satz abgeleitet: Die Flächen $p > 1$ haben $3p - 3$ Moduln.

Ehe ich die ganz einfachen Betrachtungen vortrage, aus denen dieser Satz hervorgeht, darf ich vielleicht folgende Bemerkung machen:

Cayley hatte 1865 (in den Proceedings der London Mathem. Society t I) versucht, den gleichen Satz durch algebraische Betrachtungen zu beweisen, war aber zu einem anderen Resultate gekommen. Clebsch und Gordan bezeichnen daher den Satz in der Vorrede ihrer Abel'schen Functionen (1866) als controvers. Erst Brill und Nöther haben dann 1873 gezeigt, (in der Arbeit: „Über die algebraischen Functionen und ihr Auftreten in der Geometrie", die in der Folge noch sehr oft zu nennen ist), dass auch bei algebraischer Abzählung die Zahl $3p - 3$ herauskommt. Das war natürlich nicht anders zu erwarten, nachdem in der Zwischenzeit

(1870) C. Neumann und Schwarz ihre Beweismethoden bekannt gemacht hatten, durch welche die sämmtlichen Riemann'schen Sätze (welche Riemann selbst auf das Dirichlet'sche Princip gestützt hatte) auf ein sicheres Fundament gegründet werden. Man wird den solcherweise modificirten Riemann'schen Betrachtungen vor der algebraischen Abzählung auch heute noch den Vorzug geben müßen. Denn sie beruhen auf Grundlagen, welche man vollkommen sicher beherrscht (welche überhaupt keine Ausnahme zulaßen), während die algebraischen Abzählungen, von denen hier die Rede ist, solange sie nicht noch sehr viel ausführlicher durchgearbeitet werden (und das scheint sehr mühsam) alle an einer gewißen Unbestimmtheit leiden. Man kann nämlich sofort beliebig viele Beispiele bilden, in denen sie versagen, indem Determinanten verschwinden etc., und nun fehlt der Nachweis, daß im Allgemeinen, solange keine besonderen Ausnahmefälle vorliegen, Störungen dieser Art nicht auftreten. Unsere Algebraiker laßen sich da vielfach von einem subjec-

tiven Takte leiten, der gewiss in den meisten Fällen das Richtige trifft, aber doch kein Aequivalent für einen zuverlässigen Beweis abgiebt. Man könnte, wenn man streng sein will, sagen, die betr. algebraischen Methoden haben zur Zeit nur einen heuristischen Wert.

Diese Bemerkungen reichen selbstverständlich über die Fragestellung, um die es sich hier handelt weit hinaus. Aber ich habe sie schon hier einmal in bestimmter Weise berühren wollen, weil sie im weiteren Verlaufe dieser Vorlesung immermehr in den Vordergrund rücken werden. Ich möchte in der Tat weiterhin die Aufmerksamkeit immer wieder auf die Frage lenken: Wieviel von den Sätzen die wir auf Riemann'scher Grundlage kennen lernen werden, ist bis jetzt anderweitig bewiesen? Hierüber klar zu werden, ist offenbar von der grössten principiellen Wichtigkeit. – Riemann's Abzählung der Moduln für $p > 1$ ist nun einfach folgende:

1). Die Figur in der w-Ebene hängt „endlichdeutig" von der Lage der $2p-2$ Verzweigungspunkte und dem Betrage der $2p$ Perioden a_α, b_α ab.*) Es

*) Das Wort „endlichdeutig" bedarf natürlich der Präcision. Es

giebt also ∞^{4p-2} derartige Figuren.

2). Jede Figur kann, wie wir schon bemerkten, als Fundamentalbereich benutzt werden, d. h. sie definirt eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht p.

3). Auf jeder Riemann'schen Fläche vom Geschlecht p haben wir entsprechend der Formel $w = c_1 j_1 + c_2 j_2 + \cdots c_p j_p + C$ ∞^{p+1} überall endliche Integrale.

4). Die verschiedenen Möglichkeiten, eine Riemann'sche Fläche kanonisch zu zerschneiden, bilden nur eine discontinuirliche Mannigfaltigkeit.

5) Daher liefert jede Riemann'sche Fläche vom Geschlecht p ∞^{p+1} unserer Figuren.

6). Daher endlich ist die Zahl der wesentlich unterschiedenen (nicht aufeinander-conform-eindeutig abbildbaren) Riemann'schen Flächen vom Geschlechte p: $\infty^{4p-2}/\infty^{p+1} = \infty^{3p-3}$. —

---

werden da Untersuchungen ähnlicher Art anzustellen sein, wie sie <u>Hurwitz</u> neuerdings in Ann. 39 über die Bestimmung mehrblättriger, geschlossener Flächen durch ihre Verzweigungspunkte giebt. Diese Untersuchungen sind in die oben formulirte Forderung eingeschlossen, bei unseren Figuren alle möglichen Fälle in concreto festzulegen. Solange diese Untersuchungen nicht durchgeführt sind, wird man Riemann's Abzählung der Moduln vielleicht lieber an den geschlossenen, ebenen Flächen vornehmen, worauf wir bald zurückkommen.

Dies die ganze Abzählung. Natürlich ist dieselbe auch bei $p=1$ anwendbar und muss da nur so modificirt werden, dass man in der Mannigfaltigkeit der Integrale, welche zu gegebener Riemann'scher Fläche gehören, insofern jetzt in der Abbildung die Verzweigungspunkte fehlen und also keine Argumente von Verzweigungspunkten in Rechnung zu stellen sind, die additive Constante auszulassen ist. Den ∞^2 Figuren treten also ∞ auf gegebener Fläche existirende Integrale entgegen, und wir erhalten ∞^1 unterschiedene Flächen, d. h. einen Modul, wie es sein soll. —

Abg. 25.11.91.

4). Vom Gesammtverlauf der Integrale zweiter und dritter Gattung auf der zerschnittenen Fläche. Von der analytischen Fortsetzung der erhaltenen Abbildungen.

Wenn wir den Gesammtverlauf des Integrals Y_ξ in derselben Weise studiren wollen, wie bislang den Verlauf von w, so genügt die Zerschneidung der A_i, B_i. Denn Y ist ja um seine Unstetigkeitsstelle herum nicht etwa vieldeutig. Nur die Abweichung gegen früher wird selbstverständlich eintreten, dass sich die Abbildung

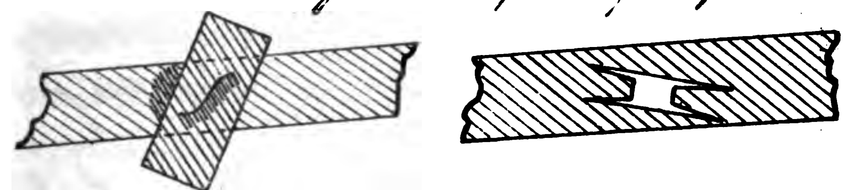
der Stelle ξ entsprechend, mit einem Blatte durch das Unendliche der $(x+iy)$ Ebene zieht. Dabei werden wir $2p-2+2=2p$ Kreuzungspunkte finden (der allgemeinen Formel entsprechend, derzufolge bei einem Integral mit m algebraischen Unstetigkeitspunkten erster Ordnung und n logarithmischen Unstetigkeitspunkten $2p-2+2m+n$ Kreuzungspunkte vorhanden sind). Hier zwei Figuren, wie sie für $p=1$ auftreten können:

(Kleines Parallelogramm, auf unbegrenzte Ebene gelegt)

(Fensteröffnung, in unbegränzter Ebene eingeschnitten)

Um aber $P_{\xi\eta}$ in derselben Weise zu untersuchen, werden wir das Schnittnetz der A_i, B_i so vervollständigen müssen, daß nach ξ und η je ein Schnitt hinläuft am einfachsten also so, daß wir ξ und η durch einen Schnitt verbinden, der den A_i, B_i nicht weiter begegnet. Auf der einen Seite dieses Schnittes ist $P_{\xi\eta}$ um $2i\pi$ größer als auf der anderen. Da ferner $P_{\xi\eta}$ in ξ und η mit dem Residuum ± 1 logarithmisch unendlich wird, so wird die Abbildung auf der $(x+iy)$-Ebene

zum Teil durch ein unendliches zwischen zwei Parallelcurven hinlaufendes Band gebildet werden, an welches dann p Parallelogramme von positivem oder negativem Flächeninhalte angefügt sind. Hier wieder zwei Beispiele für $p = 1$:



Wir verweilen bei diesen Figuren der Y, P nicht länger, sondern knüpfen an dieselben, wie an die Figuren der w, nur noch einige Folgerungen:

1). Im Falle $p = 0$ ist das Abbild von Y die schlichte $(x + iy)$ - Ebene als solche in Übereinstimmung mit dem Umstande, daß hier Y algebraisch, d. h. eindeutig auf der Riemann'schen Fläche ist und daß allgemein eine algebraische Function (wie wir bald sehen werden) auf der Riemann'schen Fläche jeden complexen Wert ebenso oft annimmt, wie den Wert ∞. Hierin liegt, daß zwei Flächen $p = 0$ untereinander immer gleichwertig sind und daß also die Flächen $p = 0$ keinen Modul haben.

2). Allgemein betrachte man jetzt die „analytische Fortsetzung" unserer Abbildungen, d. h. den Inbe=

griff der Abbildungen, welcher aus der erst construirten entsteht, indem wir dem in Betracht kommenden Integrale (w oder Y oder P) gestatten, über die Querschnitte hinüberzuwandern. Es ist dies natürlich der Inbegriff der Figuren, welche aus der ursprünglichen durch wiederholte Parallelverschiebungen um die Perioden des Integrals hervorgehen.

Am einfachsten gestaltet sich die Sache, wenn wir von dem Y des Falles $p=0$ absehen (wo überhaupt von analytischer Fortsetzung nicht die Rede ist), für das w des Falles $p=1$ und das P für $p=0$. Wir haben da als Ausgangsfiguren das schlichte Parallelogramm, bez. den schlichten Parallelstreif:

und dies:
ergeben, wenn man auf sie die zugehörigen Parallelverschiebungen in beliebiger Wiederholung anwendet, nur eine einfache Ueberdeckung der $(x+iy)$-Ebene.

Die $(x+iy)$ Ebene erscheint in aequivalente Parallelogramme, bez. Streifen einfach eingeteilt. Deshalb wird in diesen Fällen jede auf der ursprünglichen Fläche eindeutige Function auch in $(x+iy)$ eindeutig, das eine Mal eine doppelt-periodische, das andere Mal eine einfach periodische Function. Wir wollen das Sachverhältniß kurz bezeichnen, indem wir sagen, die ursprüngliche Riemann'sche Fläche selbst sei in $(x+iy)$ eindeutig doppelt-periodisch bez. einfach periodisch.

Wie aber wird die Sache in den anderen Fällen? Nehmen wir etwa die nebenstehende Figur eines zu $p=2$ gehörenden w als Ausgangsfigur. Da werden wir im Ganzen vierfach unendlich viele Fortsetzungen erhalten, den Verschiebungen $w' = w + m_1 a_1 + n_1 b_1 + m_2 a_2 + n_2 b_2$ entsprechend, jedesmal zweifach unendlich viele, welche stehenden Werten der m_2, n_2, oder stehenden Werten m_1, n_1 entsprechen, mögen wir zusammengefaßt denken. Das eine Mal erfüllen die großen Parallelogramme der bez. Figuren eine Ebene, das andere Mal die kleineren. Folgendermaßen also kön-

nen wir die Gesammtheit aller analytischen Fortsetzungen angeordnet denken: Man nehme ∞^2 Ebenen (m_2, n_2), welche man in große Parallelogramme einteile, deren einzelnes man mit (m_1, n_1) bezeichne. Man nehme ferner ∞^2 Ebenen (m_1, n_1), welche man in kleine Parallelogramme einteile, deren einzelnes man mit (m_2, n_2) bezeichne. Alle diese Ebenen schichte man in geeigneter Weise übereinander und befestige dann das „große" Parallelogramm (m_1, n_1) der Ebene (m_2, n_2) an das über ihm (oder unter ihm liegende) „kleine" Parallelogramm (m_2, n_2) der Ebene (m_1, n_1) je durch einen Verzweigungsschnitt. Wir werden wir diesen Sachverhalt kurz bezeichnen? Wir werden sagen: die ursprüngliche Riemann'sche Fläche sei in w *vierfach-periodisch*, aber *vieldeutig*.

Genau so wird sie *zweifach-periodisch und vieldeutig*, wenn wir vom Y des Falles $p = 1$, *dreifach-periodisch* und *vieldeutig*, wenn wir vom P des Falles $p = 1$ ausgehen.

Wir haben damit den einfachen Grund, weshalb es zweckmäßig ist, im Falle $p = 1$ das eine dort vorhandene überall endliche Integral w

als unabhängige Variable einzuführen, nicht aber zweckmäßig ist, im Falle $p=2$ eins der zugehörigen Integrale w_1, w_2 in entsprechender Weise zu benutzen. Denn die Analysis sucht überall *eindeutige* Functionen. Nicht daß man doppeltperiodische Functionen, sondern daß man eindeutige Functionen von w erhält, ist das Charakteristikum des Falles $p=1$.

Wir erkennen aber auch, daß Jacobi, der zum ersten Male auf den fundamentalen hier vorliegenden Unterschied aufmerksam macht und durch einen besonders genialen Ansatz daraus die Begriffsbestimmung der Abel'schen Functionen zog (d. h. $2p$-fach periodische Functionen von p complexen Argumenten) - vergl. Crelle 13, (1835): „de functionibus duarum variabilium quadruplicitter periodicis, quibus theoria functionum abelianarum innititur" - daß Jacobi von dem eigentlichen Wesen des in Betracht kommenden Unterschieds nur erst ein sehr unvollkommenes Verständniß hatte. Indem er das Wort „Function" ohne es zu sagen, ausschließlich auf eindeutige Functionen bezieht, kommt er zu dem Schlusse, daß eine Function von $(x+iy)$ höchstens zwei Perioden haben könne, und da er andererseits im Falle

$p=2$ bei dem einzelnen, zugehörigen w vier Perioden wahrnimmt, so erklärt er, dass eine Einführung dieser w als unabhängiger Variabelen $(x+iy)$ unstatthaft sei, weil sie zu keiner functionalen Abhängigkeit Anlass geben könne! Das eben ist eine der grossen Leistungen von Riemann, bei der hier vorliegenden Frage durch seine mehrblättrigen Flächen (deren Anschauung natürlich Jacobi völlig abging) Klarheit geschaffen zu haben.

Es ist auch schwer einzusehen, wie man ohne mehrblättrige Flächen in die hier vorliegende vierfache Periodicität soll eindringen können. –

Ich habe dies so ausführlich geschildert, weil Jacobis unvollkommene Darstellung des Sachverhalts immer noch vielfach reproducirt wird, z. B. noch 1885 von <u>Fuchs</u> in den Berliner Sitzungsberichten (Über den Character der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabelen). Übrigens hatte schon <u>Göpel</u> 1847, Crelle 35, in seiner „Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis" gegen Jacobi's Darstellung Einspruch erhoben, den dieser aber merkwürdigerweise in einer zugefügten Redactionsnote zurückwies. Ausführlich entwickelt den Riemann'schen Standpunkt (ohne freilich Riemann zu

nennen, und wahrscheinlich ohne die hier in Betracht kommende Stelle in No. 12 der Abel'schen Functionen zu kennen) Casorati in den Comptes Rendus t. 57 (1863, II) und t. 58 (1864, I), ferner neuerdings, an die Publication von Fuchs anknüpfend, in Acta Math. VIII (1886). Auch Weierstrass hat einige auf diese Dinge bezügliche Bemerkungen gemacht, vergl. die Schluss-bemerkungen, die er auf p. 132 seiner Abhandlungen zur Functionenlehre (1886) einem früheren Aufsatze über die Verallgemeinerung des Jacobischen Satzes auf Functionen mehrerer complexer oder reeller Variabler hinzugefügt hat.

B. 28. 11. 91.

III. Von den algebraischen Functionen auf der Riemann'schen Fläche.

A. Allgemeine Sätze vorbereitender Art.

Indem wir vorläufig annehmen, es sei uns gelungen, auf der vorgegebenen Riemann'schen Fläche algebraische (d. h. eindeutige) Functionen f herzustellen, bemerken wir vorweg:

1). Jedes f nimmt den Wert 0, oder irgend welchen anderen festen Wert, ebenso oft an, als den Wert ∞.

Man beweist dies am einfachsten, indem man sich die gegebene Riemann'sche Fläche durch die Schnitte

A, B, C in eine einfach zusammenhängende verwandelt denkt und nun längs des Randes dieser einfach zusammenhängenden Fläche $\int \frac{df}{f}$ (oder $\int \frac{df}{f-c}$) hinleitet. Hierbei entsteht notwendigerweise 0, insofern doch f auf der unzerschnittenen Fläche eindeutig ist, jedes Element der Curven A, B, C dabei aber in zweierlei Sinne durchlaufen wird. Die algebraische Summe der Residua, welche log f, bez. log (f − c) in seinen verschiedenen Unstetigkeitspunkten auf der Fläche darbietet, ist darum stets 0. Das aber ist gerade der zu beweisende Satz, so formulirt, daß er gleich auch in den Gränzfällen richtig bleibt, wo von den Nullstellen oder Unendlichkeitsstellen von f, bez. f − c, irgend welche zusammenfallen mögen.

Die Anzahl m der Punkte, in denen f diesem Satze zufolge jeden beliebig vorzugebenden Wert c annimmt, nennen wir die <u>Wertigkeit</u> von f.

Offenbar kann dieser Satz von der „<u>Wertigkeit</u>" als Verallgemeinerung des „Fundamentalsatzes" der Algebra angesehen werden, der behauptet, daß eine rationale ganze Function m^{ten} Grades von z jeden endlichen Wert m-mal annimmt. Denn eine solche Function wird auf der bei ihr in

Betracht kommenden Fläche (der schlichten z-Ebene) m mal unendlich: es liegt nur die Vereinfachung vor, daß sämmtliche m Unendlichkeitsstellen derselben bei $z = \infty$ zusammenfallen. —

2. Abbildung durch $\zeta = x' + iy$ auf die xy-Ebene.

Wir entwerfen jetzt von unserer gegebenen Riemann'schen Fläche ein Bild über der Ebene, indem wir $\zeta = x' + iy$ setzen. Irgend welche Zerschneidung der Riemann'schen Fläche ist dabei nicht vorauszusetzen, weil ja ζ auf ihr ohnehin eindeutig. Wir erhalten dementsprechend ein geschlossenes Abbild.

Und dessen Character ist durch den gerade bewiesenen Satz festgelegt: dasselbe bedeckt die ganze xy-Ebene mit m Blättern, hat also gerade die Gestalt einer „mehrblättrigen, ebenen" Riemann'schen Fläche, wie man sie der Theorie zumeist ausschließlich zu Grunde legt. —

Die Zahl der Verzweigungspunkte, vermöge deren die m Blätter zusammenhängen, kann jetzt auf doppelte Weise bestimmt werden: Entweder direct, indem man die Tatsache berücksichtigt, daß unsere m blättrige Fläche dem Geschlechte p angehört. Dann indirect, indem man sich erinnert, daß ein überall endliches Differential dw auf der R. Fläche $2p-2$

Nullpunkte darbietet, während df m Unstetigkeitspunkte zweiter Ordnung besitzen wird. Beides zusammen ergiebt die Zahl der Unstetigkeitspunkte von $\frac{df}{dw}$, und nun beachte man, dass $\frac{df}{dw}$ notwendig eine algebraische Function ist, daher, dem gerade bewiesenen Satze zufolge, ebenso oft 0 als ∞ wird. – Auf die eine wie auf die andere Weise ergiebt sich als Zahl der Punkte $df = 0$, d. h. der Verzweigungspunkte der m blättrigen Fläche, $\underline{2m + 2p - 2}$, – in Uebereinstimmung mit der auf p. 86 ohne Beweis angegebenen allgemeinen Regel.

3). <u>Algebraische Darstellung auf der m-blättrigen Fläche</u>

Man kann folgendes zeigen (was wir hier nur erst vorweg anführen):

a) Neben z kann man auf der R Fläche in mannigfachster Weise eine algebraische Function s finden, welche von z „unabhängig" ist, d. h. so beschaffen, dass zu jedem Werte von z im Allgemeinen (einzelne Werte von z ausgenommen) m verschiedene Werte von s gehören.

b) Zwischen z und einem solchen s besteht eine algebraische Gleichung, die in s bis zum m^{ten} Grade aufsteigt:

$$F(\overset{m}{s}, z) = 0$$

und die man als genaues Gegenbild unserer m blättrigen Fläche auffassen kann.

c) Jede andere zur ursprünglichen R. Fläche gehörige, algebraische Function s', mag sie von z unabhängig sein oder nicht, wird sich durch s und z rational darstellen lassen:

$$s' = R(s, z).$$

Da m = 1 zu einfach ist, – alle s werden in z selbst rational, die s sind nichts Anderes als die rationalen Functionen von z – so nehme man m = 2 als einfachstes Beispiel. Sei $\varphi_{2p+2}(z)$ eine rationale, ganze Function von z, welche in den 2p+2 Verzweigungsstellen der zweiblättrigen Fläche verschwindet, so wird man ein zugehöriges s durch $s^2 = \varphi_{2p+2}(z)$ definiren können.

4) Von dem kleinsten, zulässigen Werthe von m.

Die Annahme m = 1 ist offenbar nur mit p = 0 verträglich. Dagegen kann für m = 2, sofern wir nur die Zahl der Verzweigungspunkte (= 2p+2) hinreichend hoch wählen, p jeden beliebigen Werth erreichen. Aber man beachte, dass eine solche zweiblättrige Fläche für p > 2 niemals die allgemeine Fläche des betr. p darstellen kann. Die zweiblättrige Fläche hat nämlich nur so viele Constante, als in

den $2p+2$ Verzweigungspunkten stecken, nachdem man drei derselben durch lineare Substitution von z an irgend welche drei vorgegebene Stellen gebracht hat, also $2p-1$. Die allgemeine Fläche hing aber bei $p>1$ von $3p-3$ wesentlichen Constanten ab, für $p=1, 0$ hatten wir als Zahl dieser Constanten $1, 0$. Die Zahl $2p-1$ stimmt daher mit der Zahl der Moduln nur bei $p=0, 1, 2$; höher hinauf ist sie kleiner. Eben darum bezeichnet man den Fall einer R. Fläche, die sich in die zweiblättrige Form setzen läßt, mit einem besonderen Namen; man nennt ihn den <u>hyperelliptischen</u> Fall.

Welches ist das kleinste m, welches uns den allgemeinen Fall eines vorgegebenen p liefern kann?

Wieder gehen wir davon aus, daß wir die $2m+2p-2$ Verzweigungspunkte der z-Ebene beliebig annehmen können (denn jede m-blättrige Fläche, die wir über der z Ebene mit $2m+2p-2$ Verzweigungspunkten construiren mögen, ist doch vermöge unseres allgemeinen Existenzsatzes eine Riemann'sche Fläche). Wir überlegen ferner, daß sich bei gegebenen $2m+2p-2$ Verzweigungs<u>stellen</u> der z-Ebene jedenfalls nur eine endliche Zahl m-blättriger Flächen construiren läßt, deren Verzweigungs<u>punkte</u>

über den gegebenen Verzweigungsstellen gelegen sind. So kommen wir für die Flächen auf $2m+2p-2$ Constante. Aber drei Constante müssen wir wieder abziehen, weil man durch lineare Transformation z drei Verzweigungsstellen in beliebig vorgegebenen Lagen hineinbringen kann. So kommen wir für unsere Fläche auf $2m+2p-5$ wesentliche Constante. Diese Zahl soll $\geq$ der Zahl $3p-3$ der Moduln der allgemeinen Fläche vom Geschlechte p sein. Dies giebt $m \geq \frac{p+2}{2}$, und als <u>Minimalwert von m</u>: $\left[\frac{p+3}{2}\right]$

Uebrigens soll dies nur eine vorläufige Abzählung sein. Wir werden später noch genauer prüfen müssen, ob die bei ihr benutzte Constantenzählung als berechtigt anzusehen ist. Es kommt darauf hinaus zu prüfen, ob zwei m-blättrige Flächen vom Geschlechte p über der z-Ebene, deren Verzweigungsstellen nicht auseinander durch lineare Transformation des z hervorgehen, nicht möglicherweise doch durch eindeutige, conforme Abbildung ineinander verwandelt werden können.

5) Wir berühren hiermit ein wichtiges Problem, welches erst neuerdings von <u>Hrn. Hurwitz</u> mit Erfolg in Angriff genommen worden ist. (Math. Ann. Bd. 39, 1891) Gegeben sind die $2m+2p-2=w$

Verzweigungsstellen in der z-Ebene. Wie gross ist die Zahl der unterschiedenen zugehörigen m-blättrigen Flächen? Hurwitz hat diese Zahl, die eine merkwürdig complicirte Function von m und w zu sein scheint, jedenfalls für die niedersten Werte von m bestimmt. So findet er für:

	Zahl ψ der unterschieden Flächen
$m=2$	$\psi = 1$
$m=3$	$\psi = \frac{1}{3!}(3^{w-1}-3)$
$m=4$	$\psi = \frac{1}{4!}(2^{w-2}-4)(3^{w-1}-3)$

Er ist dann aber noch zwei Schritte weitergegangen, er hat auch die Gruppe des hier vorliegenden Problems ψ^{ten} Grades, und die Realitätsverhältnisse des Problems studirt. Wir erhalten die „Gruppe", indem wir die Verzweigungsstellen der z-Ebene von ihren Anfangslagen aus sich irgendwie bewegen lassen, bis sie schliesslich wieder die Anfangslage annehmen, und nun zusehen, wie sich hierbei unsere ψ Flächen permutirt haben. Die „Gruppe" ist der Inbegriff aller auf solche Weise

entstehenden Vertauschungen der ψ-Flächen. Die Realitätsdiscussion aber verlangt, dass wir die Verzweigungsstellen der z-Ebene symmetrisch zur z-Axe annehmen (also teils reell, teils paarweise conjugirt imaginär) und nun zusehen, welche der ψ-Flächen bei Spiegelung an der z-Axe in sich selbst übergehen, welche andererseits dabei paarweise zusammengeordnet erscheinen.

6. Hier ist es nun interessant, auf gewisse <u>algebraische</u> Untersuchungen, die in neuerer Zeit insbesondere von <u>Kronecker</u> und seinen Schülern geführt worden sind, einen Seitenblick zu werfen. Nennen wir die Gesammtheit der algebraischen Functionen s, s' unserer Fläche, welche von z unabhängig sind, eine <u>Classe</u> algebraischer Functionen. Für jedes s, s' wird man eine Gleichung n^{ten} Grades haben:

$$F(s^n, z) = 0, \quad F'(s'^n, z) = 0$$

wobei s' in s und s in s' rational ist:

$$s' = R'(s, z), \quad s = R(s', z).$$

Die „Classe" algebraischer Gleichungen erscheint hier als <u>Gesammtheit solcher einen Parameter z rational enthaltender algebraischer Gleichungen, welche durch umkehrbare Tschirnhausen-Trans-</u>

formation miteinander zusammenhängen. (Die Tschirnhausen-Transformation ist dabei als rational in z vorauszusetzen).

Wie aber werden wir bei vorgelegten zwei Gleichungen

$$F(s, z) = 0, \quad F'(s', z) = 0$$

entscheiden wollen, ob sie derselben „Classe" angehören? Wir werden uns vor allen Dingen die beiderseitigen Discriminanten D und D' bilden. Wie Kronecker zeigt, kann man die einzelne solche Discriminante als rationale, ganze Function von z in zwei Factoren zerlegen, deren zweiter notwendig in gerader Potenz auftritt.

$$D = \Delta_1 \cdot \Delta_2^2$$

wo Δ_1 die Eigenschaft hat, bei beliebiger Tschirnhausentransformation ungeändert zu bleiben, während Δ_2 irgend wechseln kann. Kronecker nennt Δ_1 darum den wesentlichen, Δ_2 den ausserwesentlichen Teile der Discriminante. Die Unveränderlichkeit der Δ_1 ruht einfach darin, dass $\Delta_1 = 0$ die Verzweigungsstellen unserer Riemann'schen Fläche ergiebt. Die Bedingung aber, welche sich von hier aus dafür ergiebt, dass $F = 0$ und $F' = 0$ derselben „Classe" angehören sollen,

(und die nur erst eine notwendige, keine ausreichende Bedingung ist), lautet einfach $\Delta_1 = \Delta_1'$: die Discriminanten D und D' müssen in ihrem wesentlichen Teiler übereinstimmen.

Soweit laufen also die genannten Untersuchungen unseren Riemann'schen Anschauungen genau parallel. Aber darüber hinaus versagt die algebraische Theorie. Man hat bis jetzt alle die Fragestellungen, welche von Riemann'scher Basis aus durch Hrn. Hurwitz in Angriff genommen sind, von algebraischer Seite noch unberührt gelassen. Doch liegt deren algebraische Bedeutung auf der Hand. Die Bestimmung von ψ z. B. giebt direct die Anzahl unterschiedener „Classen" algebraischer Gleichungen, deren Discriminanten einen vorgegebenen, wesentlichen Factor Δ_1 enthalten. Man muss sich natürlich denken, dass die Trennung dieser verschiedenen Classen durch Auflösung einer Gleichung ψ^{ten} Grades zu bewerkstelligen ist. Hurwitz' „Gruppe" giebt dann einfach die Galois'sche Gruppe dieser Gleichung, Hurwitz' Realitätsdiscussion der Flächen die Zahl ihrer reellen, bez. complexen Wurzeln. Wird es so schwierig sein, alle diese

Dinge von algebraischer Seite mit rein algebraischen Hülfsmitteln zu behandeln oder behaupten hier die Riemann'schen Methoden einen endgültigen Vorrang?

B. Herstellung algebraischer Functionen. Der Riemann - Roch'sche Satz.

Mi. 14.12.91.

1) Es giebt zwei Arten der Herstellung, deren jede ihre besonderen Vorteile hat:

a) durch Addition von Normalintegralen zweiter Gattung Y. Seien $\xi_1 \dots \xi_m$ irgend m Punkte der Riemann'schen Fläche, so addirt man $c_1 Y_{\xi_1} + \dots c_2 Y_{\xi_2} + \dots c_m Y_{\xi_m} + c$ und sucht die Constanten $c_1, c_2, \dots$ so zu bestimmen, daß nicht nur die Periodicitätsmoduln erster Art verschwinden (was wegen der Normirung der Y selbstverständlich ist), sondern auch die Periodicitätsmoduln zweiter Art. Hier ergeben sich also die algebraischen Functionen, indem man die Stellen vorschreibt, an welchen dieselben sollen unendlich werden dürfen. –

b). durch Differentiation von Integralen.

Sind J, J' irgend zwei Integrale auf der Riemann'schen Fläche, so wird der Differentialquotient dJ/dJ', oder auch d^2J/dJ'^2 etc., eine algebra-

ische Function sein. — Hier erscheinen als einfachste algebraischen Functionen diejenigen, bei denen J, J' Integrale erster Gattung sind, die sich also in der Gestalt

$$\frac{dw}{dw'} = \frac{\Sigma c_\alpha dj_\alpha}{\Sigma c'_\alpha dj_\alpha}$$

darstellen lassen. Wir werden dieselben weiterhin als Specialfunctionen bezeichnen: Die Wertigkeit einer Specialfunction ist natürlich $\leqq 2p-2$, dass sie wirklich bei jeder Riemannschen Fläche, bis zu $2p-2$ aufsteigen kann, werden wir bald zeigen. Als erweiterte Specialfunctionen werden wir dann solche bezeichnen, bei denen im Zähler und Nenner der hingeschriebenen Formel noch je bestimmte weitere dJ mit irgendwelchen Constanten hinzutreten. Beispielsweise sei nur ein solches J vorgegeben und dieses sei ein Normalintegral dritter Gattung $\Pi_{z\vartheta}$: Die zugehörigen „erweiterten Specialfunctionen" werden sich dann so schreiben:

$$\frac{\Sigma c_\alpha dj_\alpha + c\,d\Pi_{z\vartheta}}{\Sigma c'_\alpha dj_\alpha + c'd\Pi_{z\vartheta}} = \frac{d\varphi_{z\vartheta}}{d\varphi'_{z\vartheta}}$$

Sie haben offenbar die Besonderheit, an den beiden Stellen z und ϑ je denselben Wert c/c' an-

zunehmen. Wir bezeichnen sie dieserhalb als <u>gebundene Functionen</u>. Hätte man statt $d\,\Pi_z\,\vartheta$ das Differential zweiter Gattung $d\,Y_z$ vorgegeben, so hätte sich als Eigenschaft der zugehörigen erweiterten Specialfunction diese ergeben: <u>an der Stelle z ein verschwindendes Differential zu haben</u>. Analoge Einschränkungen ergeben sich für die erweiterten Specialfunctionen irgend welcher vorgebenen Art.

2). An a) der N° 1 anknüpfend beweisen wir nun gleich den Fundamentalsatz von der Zahl der in einer algebraischen Function auftretenden Constanten, den sogenannten Riemann-Roch'schen Satz (<u>Roch</u> in Crelle 64, 1865) Wenn wir die Unendlichkeitsstellen $\xi_1 \dots \xi_m$ vorgeben, wie viele der Constanten $c_1 \dots c_m$, c werden willkürlich angenommen werden dürfen?

Nach den früheren Formeln für die Perioden zweiter Art der Normalintegrale Y haben wir, damit überhaupt eine algebraische Function vorliegt, folgende p lineare Gleichungen zu erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} c_1 \frac{dj_1}{d\xi_1} + \dots \dots c_m \frac{dj_1}{d\xi_m} &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 \frac{dj_p}{d\xi_1} + \dots\dots\dots c_m \frac{dj_p}{d\xi_m} &= 0 \end{aligned}\right|$$

Sind dieselben linear unabhängig, so behalten wir $m+1-p$ Constanten, die willkürlich bleiben; aber es ist auszuschliessen, dass dieselben in besonderen Fällen linear abhängig werden.

Es wird dann für die p Gleichungen ein System von Multiplicatoren $\mu_1 \dots \mu_p$ geben, so dass $\mu_1 \times$ (linke Seite der ersten Gleichung) $+ \dots \mu_p \times$ (linke Seite der p^{ten} Gleichung) identisch Null.

Um ganz allgemein zu sein, werden wir annehmen, es gäbe σ linear-unabhängige Systeme derartiger Multiplicatoren. Dann steigt die Zahl der willkürlichen Constanten in unserer algebraischen Function auf $m+1-p+\sigma$. Was bedeutet das für die Lage der Punkte $\xi_1 \dots \xi_m$? Jedes einzelne Multiplicatorsystem besagt, dass folgende Gleichungen bestehen sollen:

$$\mu_1 \frac{dj_1}{d\xi_1} + \mu_2 \frac{dj_2}{d\xi_1} + \dots + \mu_p \frac{dj_p}{d\xi_1} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mu_1 \frac{dj_1}{d\xi_m} + \mu_2 \frac{dj_2}{d\xi_m} + \dots + \mu_p \frac{dj_p}{d\xi_m} = 0$$

Das aber heisst, dass das Differential erster Gattung:

$$dw = \mu_1 dj_1 + \mu_2 dj_2 + \dots \mu_p dj_p$$

zunehmen. Wir bezeichnen sie dieserhalb als __gebundene Functionen__. Hätte man statt $d\Pi_z{}^\delta$ das Differential zweiter Gattung dY_z vorgegeben, so hätte sich als Eigenschaft der zugehörigen erweiterten Specialfunction diese ergeben: __an der Stelle z ein verschwindendes Differential zu haben__. Analoge Einschränkungen ergeben sich für die erweiterten Specialfunctionen irgend welcher vorgebenen Art.

2). An a) der N°. 1 anknüpfend beweisen wir nun gleich den Fundamentalsatz von der Zahl der in einer algebraischen Function auftretenden Constanten, den sogenannten Riemann-Roch'schen Satz (__Roch__ in Crelle 64, 1865) Wenn wir die Unendlichkeitsstellen $\xi_1 \dots \xi_m$ vorgeben, wie viele der Constanten $c_1 \dots c_m$, c werden willkürlich angenommen werden dürfen?

Nach den früheren Formeln für die Perioden zweiter Art der Normalintegrale Y haben wir, damit überhaupt eine algebraische Function vorliegt, folgende p lineare Gleichungen zu erfüllen:

$$c_1 \frac{dj_1}{d\xi_1} + \dots c_m \frac{dj_1}{d\xi_m} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_1 \frac{dj_p}{d\xi_1} + \dots\dots c_m \frac{dj_p}{d\xi_m} = 0$$

Sind dieselben linear unabhängig, so behalten wir $m+1-p$ Constanten, die willkürlich bleiben; aber es ist auszuschliessen, dass dieselben in besonderen Fällen linear abhängig werden. Es wird dann für die p Gleichungen ein System von Multiplicatoren $\mu_1 \dots \mu_p$ geben, so dass $\mu_1 \times$ (linke Seite der ersten Gleichung) $+ \dots \mu_p \times$ (linke Seite der p ten Gleichung) identisch Null. Um ganz allgemein zu sein, werden wir annehmen, es gäbe σ linear-unabhängige Systeme derartiger Multiplicatoren. Dann steigt die Zahl der willkürlichen Constanten in unserer algebraischen Function auf $m+1-p+\sigma$. Was bedeutet das für die Lage der Punkte $\xi_1 \dots \xi_m$? Jeder einzelne Multiplicatorsystem besagt, dass folgende Gleichungen bestehen sollen:

$$\mu_1 \frac{dj_1}{d\xi_1} + \mu_2 \frac{dj_2}{d\xi_1} + \dots + \mu_p \frac{dj_p}{d\xi_1} = 0$$

. . . .

. . . .

$$\mu_1 \frac{dj_1}{d\xi_m} + \mu_2 \frac{dj_2}{d\xi_m} + \dots + \mu_p \frac{dj_p}{d\xi_m} = 0.$$

Das aber heisst, dass das Differential erster Gattung:

$$dw = \mu_1 dj_1 + \mu_2 dj_2 + \dots \mu_p dj_p$$

an den Stellen $\xi_1 \dots \xi_m$ simultan verschwinden soll. *Die Zahl σ daher*, welche wir wohl weiterhin als den *Ueberschuss* des Punktsystems der $\xi_1, \dots \xi_m$ bezeichnen werden, *stellt die Zahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung dar vor, welche in $\xi_1, \dots \xi_m$ gleichzeitig verschwinden.*
σ ist natürlich immer $= 0$, sobald $m > 2p - 2$.
Dass die Zahl der unabhängigen Constanten in unserer algebraischen Function bei dieser Definition von σ in allen Fällen gleich $m + 1 - p + \sigma$ ist, das ist der Riemann-Roch'sche Satz. Brill und Nöther, welche von diesem Theorem mannigfachste Anwendung gemacht haben, bezeichnen allerdings in ihrer Arbeit in Annalen 7. (1873): „Ueber die algebraischen Functionen etc." mit diesem Namen eine weitere Folgerung, die wir sofort besprechen werden; da diese Folgerung in allgemeiner Form aber erst l. c. von Brill und Nöther selbst entwickelt ist, scheint es richtiger, sie mit ihrem Namen in Verbindung zu bringen.

3) Der Brill-Nöther'sche Reciprocitätssatz. Der Umfang der Specialfunctionen.

Seien $dw, dw_1, \dots dw_{\sigma-1}$ σ linear unabhängige überall endliche Differentiale, welche in

$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_m$ gleich Null sind. Möge ferner dw noch in n weiteren Punkten $\eta_1 \cdots \eta_n$ verschwinden, wobei natürlich $m + n = 2p - 2$ ist. Endlich sei τ der zu $\eta_1 \cdots \eta_n$ gehörige Ueberschuss. Der Brill-Nöther'sche Reciprocitätssatz giebt dann eine Relation zwischen den Zahlen m, n, σ, τ.

Man überlege folgendes: Die Function $c\,dw + c_1\,dw_1 + \cdots c_{\sigma-1}\,dw_{\sigma-1}$, welche σ linear unabhängige Constante enthält, wird nur in den Punkten η unendlich. Andererseits kann die allgemeinste algebraische Function, die nur in den η unendlich wird, nach dem Riemann-Roch'schen Satze nicht mehr als $n + 1 - p + \tau$ Constanten enthalten. Daher folgt:

$$\sigma \leq n + 1 - p + \tau.$$

Aber da die Punkte η und die Punkte ξ sich wechselseitig bedingen, folgt ebensowohl:

$$\tau \leq m + 1 - p + \sigma.$$

Jetzt addiren wir diese beiden Ungleichungen und finden, wegen $m + n = 2p - 2$:

$$\sigma + \tau \leq \sigma + \tau.$$

Dies zeigt, daß beidemal das Gleichheitszeichen richtig sein muss. Wir haben also:

$$\sigma = n + 1 - p + \tau, \quad \tau = m + 1 - p + \sigma,$$

$$2(\sigma - \tau) = (n - m).$$

Dies ist der Brill-Nöther'sche Reciprocitätsatz. — Aus ihm folgern wir sofort, daß die eben hergestellte Function $c\,dw + c_1\,dw_1 + \cdots c_{\delta-1}\,dw_{\delta-1}$ die allgemeinste, algebraische Function dw ist, die nur in den Punkten η unendlich wird. Aber das System der Punkte η ist schließlich irgendein Punktsystem, dessen Ueberschuß $> \delta$ ist. Daher: Sobald für irgendein Punktsystem auf der Riemann'schen Fläche der Ueberschuß $> \delta$ ist, sind die zugehörigen, algebraischen Functionen Specialfunctionen.

4). Uebertragung der gefundenen Sätze auf gebundene Functionen.

Die Entwickelungen zu 2) und 3) lassen sich leicht auf irgend welche Art gebundener Functionen verallgemeinern. Bleiben wir bei der einfachsten Art der Gebundenheit, indem wir verlangen, daß unsere Functionen an der Stelle ξ immer denselben Wert annehmen sollen, wie an der Stelle ϑ. Dann wird zu den p linearen Gleichungen p. 106 unten noch die folgende zutreten:

$$c_1 Y_{\xi_1}^{\xi\vartheta} + c_2 Y_{\xi_2}^{\xi\vartheta} + \cdots c_m Y_{\xi_m}^{\xi\vartheta} = 0.$$

Aber wir hatten früher den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument: $\Pi^{\xi\eta}_{z\vartheta} = \Pi^{z\vartheta}_{\xi\eta}$. Wir folgern daraus, indem wir nach ξ differentiiren: $\frac{d\Pi_{z\vartheta}}{d\xi} = Y^{z\vartheta}_{\xi}$.

Daher lässt sich unsere $(p+1)^{te}$ Gleichung auch so schreiben:

$$c_1 \frac{d\Pi_{z\vartheta}}{d\xi_1} + \dots c_m \frac{d\Pi_{z\vartheta}}{d\xi_m} = 0$$

Die Sache verhält sich also genau so, als wäre p auf $p+1$ gewachsen und den p Normalintegralen erster Gattung $j_1 \dots j_p$ als $(p+1)^{tes}$ Integral $\Pi_{z\vartheta}$ hinzugetreten.

Die weitere Betrachtung verläuft nun genau so, wie vorhin: Wir bekommen zunächst den „verallgemeinerten" Riemann-Roch'schen Satz: Die Anzahl der Constanten in der gebundenen Function ist $m - p + \sigma'$, unter σ' die Zahl der linearunabhängigen Differentiale $d\Pi_{z\vartheta}$ verstanden, welche in den vorgegebenen Punctionen $\xi_1 \dots \xi_m$ verschwinden.

Wir erhalten ferner einen „verallgemeinerten" Reciprocitätssatz und das Theorem, dass jede Function, die in Puncten $\xi_1 \dots \xi_m$ unendlich wird, deren Ueberschuss $\sigma' > 0$, eine „Specialfunc-

tion" im erweiterten Sinne ist

So. 5.12.91. Die Form dieser Sätze ist keine zufällige, sondern hat eine tiefergehende Bedeutung. Dieselbe entspricht nämlich dem Umstande, daß man unsere Riemann'sche Fläche vom Geschlechte p als Gränzlage einer solchen vom Geschlechte $p+1$ ansehen kann, so zwar, daß beim Gränzübergang die überall endlichen Integrale $j_1 \dots j_{p+1}$ der Fläche vom Geschlechte $p+1$ einerseits die überall endlichen Integrale $j_1 \dots j_p$ der Fläche vom Geschlechte p, andererseits das zu ihr gehörige Integral $\Pi_{z\,\vartheta}$ liefern, wobei denn die „freien" algebraischen Functionen der Fläche vom Geschlecht $p+1$ in die „gebundenen" algebraischen Functionen der Fläche vom Geschlechte p übergehen. Man hat, um diesen Übergang zu bewerkstelligen, nur etwa so zu verfahren. Sei z' eine „gebundene" algebraische Function auf der Fläche vom Geschlechte p, so bilde man durch diese die Fläche auf eine m'-blättrige ebene Fläche ab, bei der die Stellen z ϑ natürlich übereinander liegen werden. Jetzt gehe man in der Weise zu einer Fläche vom Geschlechte $p+1$ über, daß man die beiden Blätter der letztge-

nannten Fläche, welche die Stellen z und ζ tragen, durch einen ganz kurzen in der Nähe von z, bez. ζ verlaufenden Verzweigungsschnitt verbinde. – Es mag genügen, die Idee eines solchen Gränzüberganges hier vorläufig einmal berührt zu haben; wir werden später auf dieselbe noch wiederholt und ausführlich zurückkommen.

5). Folgerungen aus dem Riemann-Roch'schen Satz: Endgültige Bestimmung der Zahl der Moduln.

Unsere neue Bestimmung der Zahl der Moduln soll sich von der früheren dadurch unterscheiden, daß wir jetzt die Abbildung der Riemann'schen Fläche benutzen, wie sie durch eine algebraische Function z zu Stande kommt, was doch wohl übersichtlicher ist, als die früher betrachtete Abbildung durch das Integral w, – vor allem aber dadurch, daß wir vorab eine principielle Frage erledigen: Ist es möglich, daß eine Riemann'sche Fläche durch eine *continuirliche* Gruppe von ∞^ρ Transformationen in sich übergeht? Man findet: *daß dies bei $p=0$ und $p=1$ stets statt hat, wo dann ρ den Werth 3 bez. 1 besitzt*, daß aber für $p>1$ ρ

immer Null sein muß. Man vergleiche hierzu die analytischen Beweise, die Schwarz in Crelle's Journal 87 (1879), Hettner in den Göttinger Nachrichten von 1880, Nöther in den Annalen 20, 21 (1883) gegeben haben, namentlich aber auch die geometrischen Ueberlegungen, die ich in dieser Hinsicht auf p. 68 meiner Schrift über Riemann entwickele. Daß für $p > 1$ ρ immer $= 0$ sein muß, stütze ich da auf folgende Ueberlegung: Wäre $\rho > 0$, so wäre es möglich, die Riemann'sche Fläche über sich selbst hin derart eindeutig zu verschieben, daß jedes Element der Fläche fortgesetzt mit sich selbst conform bliebe. Aber man kann eine Fläche, deren $p > 1$, nicht anders mit einem Curvensystem (von Bahncurven) eindeutig überdecken, als so, daß man in dieses Curvensystem eine Anzahl von Kreuzungspunkten einfügt. In einem solchen Kreuzungspunkte müßte die Geschwindigkeit der Verschiebung jedenfalls 0 sein, weil anderenfalls um den Kreuzungspunkt herum keine Eindeutigkeit der Verschiebung herrschen könnte: Aber dann kann die Umgebung des Kreuzungspunktes bei der

Verschiebung unmöglich mit sich selbst conform bleiben!

Die Abzählung der Moduln gestaltet sich nun so:

a). Man nehme die Wertigkeit der algebraischen Function z so groß, daß der „Ueberschuß" des Riemann-Roch'schen Satzes jedenfalls 0 ist, also $m > 2p-2$.

b) Sofern man die m Unendlichkeitspunkte eines derartigen z vorgiebt, existiren noch ∞^{m+1-p} derartige Functionen. Läßt man die Unendlichkeitspunkte selber beweglich, so werden es ∞^{2m+1-p}

Wir können also unsere Fläche auf ∞^{2m+1-p} Weisen in eine m-blättrige Fläche über der Ebene verwandeln.

c) Aber dabei entstehen, wenn unsere Fläche ∞^{ϱ} Transformationen in sich selbst zuläßt, natürlich nur $\infty^{2m+1-p-\varrho}$ unterschiedene m-blättrige Flächen.

d) Andrerseits wird unsere m-blättrige Fläche, damit sie dem Geschlechte p angehören kann, $2m+2p-2$ Verzweigungspunkte tragen müssen. Auch lernten wir inzwischen explicit, daß bei gegebenen $2m+2p-2$ Verzweigungs-

stellen der z-Ebene nur eine endliche Zahl m-blättrige Flächen des Geschlechtes p existirt, deren Verzweigungspunkte über diesen Stellen liegen.

Die Zahl der verschiedenen Flächen (m, p) ist also sicher $\infty^{2m+2p-2}$.

e). Hiernach wird die Zahl der wesentlich verschiedenen Riemannschen Flächen des Geschlechtes p, d.h. derjenigen, die nicht conform aufeinander abgebildet werden können: $\infty^{2m+2p-2} : \infty^{2m+1+p-\varrho}$, d.h. $\infty^{3p-3+\varrho}$.

f) Die so gefundene Zahl $3p-3+\varrho$ der Moduln stimmt nun in allen Fällen, d.h. auch, wenn $p=0$ oder 1 ist. —

Aber wir können diese Abzählung noch mit einer weitergehenden Erläuterung begleiten. Lüroth (Ann. 4, 1871) und Clebsch (Ann. 6, 1873) haben gezeigt, daß jede Fläche mit n Blättern und w Verzweigungspunkten, die wir über der Ebene konstruiren mögen, in jede andere Fläche (n, w) continuirlich (durch Wandernlassen der Verzweigungspunkte) übergeführt werden kann.*)

---

*) d.h. man kann diesen Satz aus den Entwickelungen von Lüroth und Clebsch ablesen; vergl. meine Schrift über Riemann, p. 6

Anders ausgesprochen: Die Gleichung ν^{ten} Grades, welche bei gegebenen Verzweigungsstellen die zugehörigen m-blättrigen Riemann'schen Flächen bestimmt, ist irreducibel. Für uns hier hat das die Bedeutung:

Die $(3p-3+\rho)$ fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der Gebilde vom Geschlechte p besteht aus einem einzigen zusammenhängenden Stücke.

Hat also irgend ein specielles Gebilde vom Geschlechte p besondere Eigenschaften, so müssen sich diese immer aus den allgemeinen Eigenschaften, welche übrigens bei den Gebilden vom Geschlechte p auftreten, durch Gränzübergang ableiten lassen.

6). Weitere Folgerungen aus dem Riemann-Roch'schen Satze: die Wertigkeit der Specialfunctionen.

Bemerken wir vorab dieses: wenn wir in dem Ausdrucke

$$c_1 Y_{\xi_1} + \dots c_m Y_{\xi_m} + c$$

die $c_1 \dots c_m$ so bestimmen, daß eine algebraische Function vorliegt, so können dabei einige der c_i gerne Null werden. *Dann ist also die Wertigkeit der gewonnenen, algebraischen Function $< m$*; es scheiden

einige der Punkte $\xi_1, \dots \xi_m$ von selbst aus der Reihe der Unendlichkeitspunkte aus. So ist es zum B., um das trivialste Beispiel zu nennen, wenn (für $p > 0$) $m = 1$ ist. Wir haben dann einen Ueberschuss $\sigma = p - 1$, also nach dem Riemann-Roch'schen Satze $1 + 1 - p + p - 1 = 1$ willkürliche Constante in der zugehörigen Function. Diese Function ist einfach die additive Constante selbst; sie hat die Wertigkeit 0 und garkeinen Unendlichkeitspunkt! Ueberhaupt aber werden wir sagen: Wenn wir unsere m Punkte (mit dem Ueberschusse σ) so in $(m' + m'')$ Punkte zerlegen können, dass zu den m' Punkten der Ueberschuss $\sigma' = \sigma + m''$ gehört, so also, dass der Riemann-Roch'sche Satz für die m und die m' Punkte die gleiche Constantenzahl $m + 1 - p + \sigma$ ergiebt, so scheiden die m'' Punkte aus der Reihe der effectiven Unendlichkeitspunkte von selber aus.

Diesen Bemerkungen gegenüber muss ausdrücklich bewiesen werden, dass die Wertigkeit einer Specialfunction $\frac{dw'}{dw}$ bis auf $2p-2$ aufsteigen kann. Man erkennt dies so: Wäre es nicht der Fall, so müssten alle dw irgend-

welche Zahl μ von Verschwindungsstellen gemein haben. Für den einzelnen solchen Punkt wäre der Ueberschuss $\sigma = p$, die Zahl des Riemann-Roch'schen Satzes $= 2$; man hätte eine algebraische Function $c_1 Y_{\xi_1} + c_2$ (mit willkürlichen c_1, c_2), welche nur einwertig wäre, was mit der Annahme $p > 1$ unverträglich ist. —

Besonders lehrreich sind ferner die Verhältnisse <u>des hyperelliptischen Falles</u>. Legen wir zur Discussion desselben gleich die zweiblättrige Fläche über der z-Ebene zu <u>Grunde</u> und wählen wie früher:

$$s = \sqrt{f_{2p+2}(z)}.$$

so lassen sich p zugehörige linear unabhängige überall endliche Integrale in der Form auswählen:

$$w_1 = \int \frac{dz}{s}, \quad w_2 = \int \frac{z\,dz}{s}, \quad \ldots \quad w_p = \int \frac{z^{p-1}\,dz}{s}$$

Das allgemeinste Punktsystem der zweiblättrigen Fläche, welches durch $dw = 0$ vorgestellt werden kann, wird hiernach durch eine Gleichung folgender Form gegeben sein.

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots c_{p-1} z^{p-1} = 0$$

Dasselbe besteht also aus denjenigen $2p-2$ Punkten der Fläche, welche an irgend $p-1$ Stellen der z-Ebene in den beiden Blättern übereinander liegen. Von hier aus untersuche man nun den „Ueberschuss“,

welchen irgend m Punkte der zweiblättrigen Fläche je nach ihrer Lage darbieten können, und bestimme die „Wertigkeit" der zugehörigen algebraischen Functionen.

7) Von den verschiedenen Normalflächen über der z-Ebene, welche man als einfachste Formen der Gebilde irgend welchen Geschlechtes in Vorschlag gebracht hat.

Für $p=0$ haben wir natürlich die einblättrige Fläche, für $p=1$ die zweiblättrige, mit deren Betrachtung man die Theorie der elliptischen Functionen gewöhnlich beginnt (vergl. H. I, 1 der Modulfunctionen). Daß man für $p>0$, sofern der hyperelliptische Fall vorliegt, jedenfalls die zweiblättrige Fläche wählen wird, ist selbstverständlich. Die Frage ist, wie man diese Normalfläche des hyperelliptischen Falles für die anderen Fälle eines beliebigen p verallgemeinern soll? Man hat diese Verallgemeinerung nach drei Richtungen gemacht:

Mi: 8.12.91. a). In Band 9 der Annali di Matematica ser. 2, 1879 macht Christoffel den Vorschlag, in jedem Falle die mindestblättrige Fläche zu wählen, die hergestellt werden kann. Wir haben früher schon vorläufig abgezählt, daß immer

eine Fläche hergestellt werden kann, deren Blätterzahl > 2 aber ≤ $\left[\frac{p+3}{2}\right]$ ist. Demnach werden wir $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ Arten von Gebilden des Geschlechtes p unterscheiden z. B. p = 3 Gebilde, welche sich durch zweiblättrige, und solche, welche sich durch dreiblättrige Flächen vorstellen lassen etc. –

b). Weierstraß bevorzugt in seinen Vorlesungen (über Abel'schen Functionen) welche bei z = ∞ nur einen Punkt besitzt, d. h. deren sämmtliche m Blätter bei z = ∞ in einem (m – 1) fachen Verzweigungspunkte zusammenhängen. Es wird dies dadurch bedingt, daß W. alle vorkommenden Functionen in Reihen zu entwickeln pflegt, die in der Umgebung von z = ∞ convergiren: hat man bei z = ∞ nur einen einzigen Punkt der Riemann'schen Fläche in Betracht zu ziehen, so ist das dafür natürlich eine wesentliche Vereinfachung.

Die Blätterzahl dieser mindestblättrigen Flächen kann, jenachdem, 2, 3, ⋯ p betragen. Vergleiche Schottky in Crelle 83, p 317 ff (1877). Valentin (Berliner Dissertation 1879), Nöther in Crelle 92 und 97 (1882-84); vergl. auch Heft I meiner Vorlesungen über Abel'sche Functionen. (Sommer 1888).

c) Ich selbst habe in Heft II meiner Abel'schen Functionen (Winter 88-89), sowie in Annalen 36 (1889) eine Normalform der mehrblättrigen Fläche in Vorschlag gebracht, welche ich als *kanonische* Fläche bezeichne. Um zu erklären, worin deren Eigentümlichkeit besteht, muss ich einige Definitionen, die sogleich ohnehin wichtig werden, voranschicken.

Unter den algebraischen Functionen einer über der z-Ebene ausgebreiteten Fläche bezeichnet man diejenigen insbesondere als *ganze* Functionen, welche nirgends sonst, als in den Punkten $z = \infty$, unendlich werden. Sei $G(z)$ eine solche Function und ihr Unendlichwerden in den verschiedenen $z = \infty$ entsprechenden Punkten durch $z^{\nu_1}, z^{\nu_2}, \ldots$ etc. gemessen. Sei ferner ν die kleinste ganze Zahl, welche $\geq \nu_1, \nu_2, \ldots$ ist. Ich setze dann homogen machend $z = z_1/z_2$ und bilde das Product:

$$z_2^{\nu} \cdot G(z) = \Gamma_{\nu}(z_1, z_2),$$

welches ich als eine zur Riemann'schen Fläche gehörige, *algebraische Form* vom Grade ν bezeichne. Augenscheinlich hat Γ_{ν} keine Unendlichkeitspunkte mehr. Was die Zahl ihrer Null-

punkte angeht, die ich als <u>Wertigkeit</u> der Form bezeichne, so beträgt dieselbe m_ν. In der Tat ergiebt sich diese Zahl, wenn man $\Gamma_\nu(z_1, z_2)$ gleich einer <u>rationalen</u> ganzen Form ν^{ten} Grades $\gamma_\nu(z_1, z_2)$ setzt. Sie folgt daraufhin allgemein, wenn man den Quotienten Γ_ν/γ_ν bildet, der eine algebraische Function der Riemann'schen Fläche vorstellt und deßhalb ebenso viele Nullpunkte als Unendlichkeitspunkte darbieten muß. – Man beachte übrigens, daß die hiermit genommene Definition der ganzen algebraischen Form nur der Bequemlichkeit halber an die Begriffsbestimmung der ganzen algebraischen Function angeschlossen wurde, daß in Wirklichkeit bei ihr jede Bevorzugung des Punctes $z = \infty$ wegfällt.

<u>Hierauf definire ich nun so: ich nenne eine m-blättrige über der z-Ebene ausgebreitete Fläche <u>kanonisch</u>, wenn ihre $2m + 2p - 2$ Verzweigungspunkte die Nullpunkte einer sonst nirgends verschwindenden, ganzen, algebraischen Form Σ sind</u>. So ist es ja in der Tat bei der hyperelliptischen Fläche $s = \sqrt{f_{2p+2}(z)}$; man hat bei ihr Σ einfach gleich $\sqrt{f_{2p+2}(z_1, z_2)}$ zu setzen.

Der Grad von Σ ist hier der $(p+1)^{te}$.

Man erhält sofort eine Reihe von Sätzen, durch welche die Begriffsbestimmung der kanonischen Fläche näher festgesetzt wird, und aus denen insbesondere folgt, daß jedes algebraische Gebilde in Gestalt einer kanonischen Fläche gesetzt werden kann.

Zunächst: Sei $(\delta+2)$ der Grad von Σ. Da Σ nirgends sonst als in den $2m+2p-2$ Verzweigungspunkten verschwinden soll, folgt $m(\delta+2)=2m+2p-2$, d. h. $m\cdot\delta=2p-2$. Die Blätterzahl m der kanonischen Fläche muß also, wenn sie nicht $=2p-2$ ist (was man als den allgemeinen Fall anzusehen hat), ein Teiler von $2p-2$ sein. Ferner: Wir bilden uns die Integrale $w=\int \frac{z_1^\delta (z\,dz)}{\Sigma}$, $w'=\int \frac{z_2^\delta (z\,dz)}{\Sigma}$, die sich sofort als Integrale erster Gattung zu erkennen geben.

Wir haben daraufhin: $(z_1/z_2)^\delta = dw : dw'$!
Die δ^{te} Potenz von z ist eine Specialfunction von der Wertigkeit $2p-2$.

Umgekehrt aber: Sei $z^\delta = dw : dw'$ eine Specialfunction von der Wertigkeit $2p-2$. Wir können ein solches z jedenfalls bilden, sofern wir $\delta=1$ nehmen; ob es für andere Werte von δ auch noch

zugehörige z giebt, bleibe dahingestellt; in der Tat wird ja, wenn $dw : dw'$ eine Specialfunction von der Wertigkeit $2p-2$ ist im Allgemeinen keine aus derselben gezogene Wurzel auch noch eine auf der Riemann'schen Fläche eindeutige Function sein können. Wir bilden dann $\frac{dz}{dw'}$. Es ist dies eine algebraische Function der Fläche, welche in sämmtlichen $\frac{2p-2}{\delta}$ Puncten $z = \infty$ gleichförmig unendlich wird, überall sonst aber endlich bleibt. In dem $\frac{(2p-2)(\delta+2)}{\delta}$ Puncten $dz = 0$ wird sie einfach zu Null. Wir schliessen, daß sie in jedem Puncte $z = \infty$ $(\delta+2)$-fach unendlich wird. Daher wird $\Sigma \cdot z_2^{\delta+2} \frac{dz}{dw'}$ eine algebraische Form sein, die nur in den Puncten $dz = 0$, d.h. in den Verzweigungspuncten der über der z-Ebene ausgebreiteten Fläche verschwindet. Mit anderen Worten: die über der z-Ebene ausgebreitete Fläche ist kanonisch. Die Bedingung, daß z^δ gleich einer Specialfunction von der Wertigkeit $2p-2$ sein soll, ist also für den kanonischen Character der Fläche nicht nur notwendig, sondern auch ausreichend. – Der Vorzug der hiermit gewonnenen, kanonischen Flächen ist nun

der, daß auf ihnen die Integrale erster, zweiter und dritter Gattung etc. eine besonders einfache Darstellung finden; doch kann das Nähere hierüber erst weiter unten angegeben werden.

8). Schlußbemerkung. Unsere weitere Absicht wird nun sein, die jetzt in ihren Grundzügen festgelegte Riemann'sche Theorie der eindimensionalen, algebraischen Gebilde mit den Entwickelungen einerseits der Algebraisten und Arithmetiker, andererseits der Geometer in Verbindung zu setzen, wie wir schon in der Einleitung sagten. Die Entwickelungen der Geometer werden den größten Teil unseres Interesses in Anspruch nehmen; doch wollen wir hierauf erst nach Weihnachten eingehen, wo ich dann zuerst einen längeren Excurs über die Theorie der algebraischen Curven bringen muß. Einstweilen besprechen wir ausschließlich diejenigen, in neuester Zeit insbesondere von arithmetischer Seite ausgehenden, algebraischen Entwickelungen, welche unmittelbar an eine m-blättrig über der z-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche anknüpfen. Hierher gehören, um nur eines zu nennen:

1) die bez. Entwickelungen in Weierstraß' Vorlesungen über Abel'sche Functionen (Lesezimmer).

2) Ausgedehnte Entwickelungen von Christoffel, von denen aber nur Einiges publicirt ist (Annali di Matematica, ser. 2, X, 1880: Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung).

ferner von arithmetischer Seite:

3) Kronecker in Bd. 91 des Journals f. Mt. (1881) Ueber die Discriminante der algebraischen Functionen einer Variabelen,
und die umfassende Abhandlung desselben in Bd. 92 des Journals (1882): Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.

4). Dedekind und Weber in einer bemerkenswerten Abhandlung in Bd. 92 des Journals (1882): Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen; man vergleiche, was die Beziehung zu den Kr. Untersuchungen anlangt, die Einleitung der Kr. Abhandlung in Bd. 91.

Insbesondere will ich noch auf eine ganz neue Arbeit von Hensel aufmerksam machen (Journal Bd. 109, 1891), in welcher der Verf. dasselbe Mittel des Homogenmachens und der algebraischen Formen benutzt, welches wir eben besprachen, und sich übrigens das Ziel setzt, die einzelnen zu besprechenden, analy=

tischen Prozesse jeweils auf eine endliche Zahl aus=
führbarer Operationen zurückzuführen.

Indem wir zu diesen verschiedenen Entwicke-
lungen in dem folgenden Kapitel Stellung nehmen,
haben wir den grossen Vorzug voraus, dass uns
die Existenz und Zahl der auf der Riemann'schen
Fläche vorhandenen algebraischen Functionen
und Integrale von vornehrein bekannt ist, und wir
nur noch nach der algebraischen Darstellung der=
selben zu fragen brauchen. Die genannten Autoren
dagegen sehen sich vor der doppelten Aufgabe ein=
mal diese algebraische Darstellung zu leisten, an=
dererseits von ihr ausgehend zu den Sätzen über
die Existenz und die Zahl der Functionen zu ge-
langen. Daher hat ihre Entwickelung, sofern sie
sich nicht auf Riemann'sche Flächen mit getrennten
Verzweigungspunkten oder sonstige einfache Fälle
beschränkt, etwas sehr Mühsames und Abstractes.

Sa. 12.12.91.

IV. Algebraische Darstellung auf der n-blättrig über der z-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche.

A. Vorbemerkung. Wir werden in der Folge
vielfach von der Schreibweise der analytischen

Geometrie Gebrauch machen, welche neben reellen Punkten (s, z) einer Ebene auch imaginäre „Punkte" der Ebene kennt, so daß die „Curve" $f(s, z) = 0$ nicht nur der Inbegriff der reellen Werthpaare (s, z), sondern auch der Inbegriff der complexen Werthepaare (s, z) ist. Diese Sprechweise ist zur Bezeichnung gewisser Vorkommnisse so expedit, daß es pedantisch wäre, sie vermeiden zu wollen.

Aber es bringt ihre Verwendung zweierlei Mißstände allerdings mit sich: einmal den, daß sie die Aufmerksamkeit von den gestaltlichen Verhältnissen, welche eine Curve $f(s, z) = 0$ im Reellen darbietet, unwillkürlich ablenkt, dann aber, daß es geradezu schwer wird, wenn man sich an die allgemeinere, analytische Bedeutung der Ausdrücke Curve, Punkt etc. gewöhnt hat, die im Reellen stattfindenden Verhältnisse sprachlich zu bezeichnen. Immer vermindern wir diesen Uebelstand, indem wir sein Vorhandensein ausdrücklich constatiren.

Von dieser „Curve" $f(s, z) = 0$ werden wir nun im folgenden wiederholt voraussetzen, daß sie allgemein sei. Es soll dies einmal heißen, daß die Curve im Endlichen nirgendwo andere, singuläre Punkte

als „Doppelpunkte" besitzt, d.h. Stellen (s, z), für welche zwar $\frac{\partial f}{\partial s}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ gleichzeitig $= 0$, nicht aber noch höhere Differentialquotienten oder Verbindungen von solchen verschwinden. Es soll dies andererseits heissen, dass die Curve gegen die z-Axe „allgemeine Lage" habe. Wenn wir bei unserer Discussion, wie wir das doch im vorliegenden Kapitel tun wollen, das z vor dem s als „unabhängige" Variablen auszeichnen, so heisst das für die analytisch geometrische Betrachtung so viel, dass wir weniger die Curve als solche, als vielmehr ihre Projection auf die z-Axe auffassen. „Allgemeine Lage" wird dabei vorhanden sein, wenn die Curvenpunkte, welche bei dieser Projection eine besondere Rolle spielen, nämlich die „Curvenpunkte mit verticaler Tangente" keine besondere Lage haben. Keiner dieser Punkte soll ∞ weit liegen, oder in einen der Doppelpunkte der Curven hineinfallen. Niemals sollen zwei vertical übereinander liegen. Keiner derselben soll ein Wendepunkt sein. – Uebrigens sind die in Rede stehenden Punkte analytisch dadurch charakterisirt, dass in ihnen zwar $\frac{\partial f}{\partial s}$ verschwindet, nicht aber $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Der hiermit geschilderte „allgemeine" Fall

einer Curve $f(s,z)=0$ wird uns im Folgenden wohlverstanden niemals zum Beweise allgemeiner Theoreme dienen, sondern nur zur Veranschaulichung: er giebt uns ein Beispiel, an dem wir unsere Ideen besonders bequem ordnen können.

Die Zeiten, in denen man die Eigenschaften algebraischer Gebilde so ableitete, daß man kurzweg nur den allgemeinen Fall in Betracht zog, sind vorüber. Wir werden ja nicht vermeiden können, auch solche Theoreme aufzustellen, die nur „im Allgemeinen" richtig sind; dann aber werden wir den hierin liegenden, begränzten Charakter der Theoreme ausdrücklich hervorheben und jedesmal angeben, was wir dabei unter dem Ausdruck „im Allgemeinen" verstehen.

B.) Darstellung bei Zugrundelegung einer einzelnen algebraischen Function s.

Es sei nun s irgend eine algebraische Function auf der n-blättrig über der z-Ebene ausgebreiteten Fläche. Wir werden dann eine Gleichung aufstellen können:

$$s^m + p\,s^{m-1} + q\,s^{m-2} + \ldots\ldots = 0,$$

deren Wurzeln die verschiedenen zu einem

Werte von z in den m Blättern zugehörigen Werte s_1, $s_2 \ldots s_m$ sind. Da schliessen wir zunächst, dass die Coefficienten $p, q, \ldots$ als symmetrische Verbindungen der $s_1, s_2, \ldots$ eindeutige Functionen von z sind, dann aber, insofern s auf der Riemann'schen Fläche keine wesentlich singulären Punkte darbieten sollte, dass sie rationale Functionen von z sind. s selbst ist also algebraische Function von z, wie wir das schon in Aussicht genommen hatten, als wir s überhaupt als algebraische Function der Riemann'schen Fläche bezeichneten.

Dabei können wir s jedenfalls so annehmen, dass die Discriminante der angegebenen Gleichung nicht identisch verschwindet. Letzteres könnte nur eintreten, wenn unter den zu demselben Werte von z gehörigen $s_1, s_2, \ldots$ je zwei oder je drei etc. gleich wären. Dies aber tritt sicher nicht ein, wenn wir s etwa von seinen Unendlichkeitspunkten aus construiren, und diese so auf unserer Riemann'schen Fläche annehmen, dass sie alle zu verschiedenen z gehören (dass nirgends zwei oder mehr derselben übereinander liegen).

Sehen wir von besonderen Wertsystemen ab, die nur in endlicher Zahl auftreten, so wird bei so gewähltem s nicht nur jedem Punkte der Riemann'schen Fläche blos eine Wertecombination (s, z) entsprechen, sondern jeder Wertecombination auch nur ein Punkt der Fläche. Eine solche algebraische Gleichung ist es dann, die unter

$$f(s, z) = 0$$

verstanden sein soll, und von der wir sagen, dass sie unsere Riemann'sche Fläche darstelle.

b) Wir erläutern jetzt am „allgemeinen" Falle der Gleichung $f(s, z) = 0$ wie die Eigentümlichkeiten der „Curve" $f(s, z) = 0$ mit denen der zugehörigen Riemann'schen Fläche zusammenhängen.

Da zeigt sich sofort:

a') Einem Doppelpunkte der Curve entsprechen zwei übereinanderliegende Punkte der Riemann'schen Fläche, in denen die letztere keine weitere Besonderheiten darbietet. In der Tat lässt sich für eine solche Stelle (s_0, z_0) die Differenz $(s - s_0)$ für jeden der beiden durch den Doppelpunkt durchlaufenden Zweige der Curve in eine gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen von $(z - z_0)$ fortschreitende Reihe entwickeln.

b') Dagegen entspricht einem Curvenpunkte mit verticaler Tangente ein <u>Verzweigungspunkt</u> der Riemann'schen Fläche. Die zugehörige Entwickelung hat die Gestalt $s - s_0 = \mathfrak{P}(\pm\sqrt{z - z_0})$.

Man kann sagen, dass dasjenige Vorkommniss, welches für die Curve $f(s, z) = 0$ wesentlich in Betracht kommt, auf der Riemann'schen Fläche zurücktritt, umgekehrt aber die Punkte für die Riemann'sche Fläche wesentlich werden, die für die Curve nur eine beiläufige Bedeutung haben.

Beiderlei Vorkommnisse liefern nun für die <u>Discriminante</u> von $f(s, z) = 0$, d. h. für die Resultante von $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$, ihren charakteristischen Beitrag. Wir wollen uns diese Discriminante so gebildet denken, dass wir in $f(s, z) = 0$ zuvörderst alle Nenner fortschaffen, die Functionen von z sein mögen. Dann wird uns die Discriminante als ganze Function von z, $D(z)$, entgegentreten. Nun bemerkten wir schon früher, dass sich dieses $D(z)$ in einen <u>wesentlichen</u> Factor $D_1(z)$ und in einen quadratisch auftretenden sog. <u>ausserwesentlichen</u> Factor $D_2(z)$ spaltet, nach der Formel $D = D_1 \cdot D_2^2$.

Dabei sollte D_1 von der Auswahl der zur Riemann'schen Fläche gehörigen, algebraischen Funktion s unabhängig sein, D_2 mit ihr wechseln.

Die Allgemeingültigkeit dieser Formel wird erst weiter unten von uns abzuleiten sein; hier handelt es sich einstweilen nur darum, ihre Bedeutung im Falle der allgemeinen Gleichung $f(s,z)=0$ nachzuweisen. Da ist die Sache die:

Der wesentliche Faktor D_1 entspricht den Verzweigungspunkten unserer Riemann'schen Fläche, also den Curvenpunkten mit verticaler Tangente, der ausserwesentliche Faktor D_2 den Doppelpunkten.

In der Tat, die Differenz der beiden im Verzweigungspunkte einander gleich werdenden s_1, s_2 wird sich analytisch so darstellen:

$$\sqrt{z-z_0}\;\left(\mathfrak{P}(\sqrt{z-z_0})\right)$$

(wo $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe, deren erstes, constantes Glied nicht verschwindet). Daher enthält D_1 (welcher die Differenz (s_1-s_2) ins Quadrat erhoben enthält) den rationalen Faktor $(z-z_0)$ nur einfach. — Andererseits haben wir für den Doppelpunkt die Darstellung:

$$s_1-s_2=(z-z_0)\cdot\mathfrak{P}(z-z_0),$$

und es enthält also $\mathfrak{P}$, welches durch $(s_1 - s_2)^2$ teilbar sein muss, den Faktor $(z - z_0)$ doppelt.

c) Ausgehend von $f(s, z) = 0$ läßt sich jetzt jede andere, algebraische Funktion S der Riemann'schen Fläche rational durch s und z darstellen:

$$S = R(s, z).$$

Man leistet das am einfachsten durch die Interpolationsformel:

$$S = \sum_1^m \frac{S_i}{f'(s_i, z)} \cdot \frac{f(s, z)}{s - s_i}.$$

In der Tat bringen wir hier alle Summenglieder auf gleiche Benennung, – nachdem wir die Division von $f(s, z)$ durch $s - s_i$, die ohne Rest vollzogen werden kann, ausgeführt haben, – so ziehen sich die Coefficienten der einzelnen Potenzen von s zu rationalen Funktionen von z zusammen, und wir erhalten eine Formel von folgender Bauart:

$$S = r_0(z) + r_1(z) \cdot s + r_2(z) \cdot s^2 + \cdots r_{m-1}(z) \cdot s^{m-1}.$$

Die kann man dann hinterher mit Hülfe von $f(s, z) = 0$ noch beliebig modificiren, wobei aber S immer rational in s, z bleibt. –

Ich könnte nun hier unter Bevorzugung des „allgemeinen" Falles, eine Erläuterung

darüber eintreten lassen, wie es bei dieser Darstellung um die Unendlichkeitspunkte von S steht. Inzwischen wird es genügen, eine solche Discussion erst sogleich eintreten zu lassen, wo S und s beide als ganze algebraische Functionen der Fläche vorausgesetzt sind. Hier will ich nur den einen Punkt hervorheben:

Für die zwei in einem Doppelpunkte von $f(s,z)=0$ zusammenlaufenden Curvenaeste hat s ja denselben Wert. Insofern nun $S=R(s,z)$, könnte es scheinen als müsste eine beliebige, algebraische Function S der Fläche in beiden Curvenaesten auch denselben Wert annehmen, in Formel $S_z=S_e$, sofern z, e die beiden Stellen der Riemann'schen Fläche bezeichnen, die im Doppelpunkte der Curve vereinigt sind. Dann wäre also die beliebige, algebraische Function S der Fläche eine gebundene Function, was doch unmöglich ist. – Die Auflösung dieses Paradoxons liegt darin, dass noch die Möglichkeit in Betracht kommt, dass $R(s,z)$ im Doppelpunkte $0/0$ wird, – womit in der Tat der Widerspruch wegfällt, weil dann der „wahre Wert" von R durch Gränzubergang bestimmt wer-

den muss und dieser für die beiden Aeste des Doppelpunktes im Allgemeinen verschiedene Werte ergeben wird. Wollen wir R gleich dem Quotienten zweier ganzen Functionen von s und z setzen: $R = \Phi(s,z) : \Psi(s,z)$
und $\Phi = 0$ die Zählercurve, $\Psi = 0$ die Nennercurve nennen. Soll R im Doppelpunkte $\frac{0}{0}$ werden, so werden beide Curven $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ durch den Doppelpunkt hindurchlaufen müssen: die Curven werden gebunden sein müssen, damit die Function „frei" sein kann. Solche „gebundene" Curven nennen Brill und Noether der „Grundcurve $f = 0$ adjungirt."

Natürlich muss zwecks allgemeiner, algebraischer Darstellung der Functionen S, sofern wir auf dem hier eingeschlagenen Wege weiter vordringen wollen) die Theorie der adjungirten Curven für beliebige, singuläre Curvenpunkte entwickelt werden, was eine sehr umständliche Aufgabe ist. Dann erst kann man zusehen, wie sich die Darstellung solcher S gestaltet, die an gegebenen Stellen unendlich werden, und versuchen, aus der Darstellung heraus einen Beweis des

Riemann-Roch'schen Satzes zu finden. Ich muss mich hier darauf beschränken, auf die bez. Darstellungen bei Weierstrass, Christoffel u. A. zu verweisen.
Eben da wolle man nun auch nachsehen: wie man Integrale erster, zweiter, dritter Gattung durch Formeln $\int R(s, z)\,dz$ darzustellen hat. Dabei muss sich dann zeigen, dass es genau p linear unabhängige überall endliche Integrale giebt, etc. etc. Wir unterlassen, auf diese Entwickelungen im Einzelnen einzugehen, da uns die folgende Nummer für die gleichen Zwecke einfachere Hülfsmittel zur Verfügung stellt.

c) Heranziehung der zur Riemann'schen Fläche gehörigen, algebraischen Formen (ganzen algebraischen Functionen)

d). Was eine zu unserer über der z-Ebene ausgebreiteten R.-Fläche zugehörige, algebraische ganze Function $G(z)$ ist, und wie sich aus ihr der Begriff der algebraischen Form (der „ganzen" algebraischen Form): $I_\nu(z_1; z_2) = z_2^\nu \cdot G(z)$ entwickelt, haben wir schon neulich gesehen. Was die Gleichung angeht, die G mit z verbindet, so wird dieselbe folgende Form haben:

$$G^m + g^{(1)} G^{m-1} + g^{(2)} G^{m-2} + \ldots\ldots + g^{(m)} = 0,$$

wo die $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots$ rationale ganze Functionen sind. Analog wird für Γ_ν eine Gleichung bestehen:

$$\Gamma^m + \gamma_\nu^{(1)} \Gamma^{m-1} + \gamma_{2\nu}^{(2)} \Gamma^{m-2} + \ldots\ldots = 0,$$

unter $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots$ rationale ganze Formen von $z_1 : z_2$ verstanden, deren Grad ersichtlich $\nu, 2\nu, \ldots$ beträgt. In solchen Gradbestimmungen ist die homogene Formulirung der nicht homogenen immer überlegen, insofern bei letzterer ein Vorkommniss, welches bei homogener Schreibweise sich dadurch documentirt, daß z_2 in irgend welcher Potenz als Factor vortritt, nur soweit sich geltend machen kann, als der Grad der nicht homogen geschriebenen Ausdrucks unter den Normalgrad sinkt.

So werden wir z. B. für die Discriminante von Γ den Satz haben, daß sie eine rationale ganze Form von z_1, z_2 vom Grade $m(m-1)\nu$ vorstellt: $= \Delta_{m\cdot(m-1)\cdot\nu}$,

während wir für die Discriminante von G, wenn wir allgemein sein wollen, nur aussagen können, daß sie eine rationale ganze Function von z ist, deren Grad den Betrag $m(m-1)\nu$ nicht übersteigt.

Es ist leicht zu sehen, daß die Betrachtung der Γ, G für unseren Zweck der algebraischen

Darstellung der zur m-blättrigen Fläche gehörigen Functionen ausreicht. Habe man beispielsweise für s, wie früher:

$$s^m + p s^{m-1} + q s^{m-2} + \ldots = 0,$$

so wollen wir mit allen Nennern in z heraufmultipliciren und bekommen eine Gleichung:

$$g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + g_2 s^{m-2} + \ldots\ldots = 0,$$

wo die g rationale, ganze Functionen von z sind. Statt dessen schreiben wir jetzt:

$$g_0^m s^m + g_0^{m-1} g_1 s^{m-1} + g_0^{m-1} g_2 s^{m-2} + \ldots = 0,$$

und substituiren: $g_0 s = \mathcal{G}$. Wir haben dann für $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}^m + g_1 \mathcal{G}^{m-1} + g_0 g_2 \cdot \mathcal{G}^{m-2} + \ldots\ldots = 0,$$

d. h. $\mathcal{G}$ ist eine ganze algebraische Function, s aber erscheint als Quotient der beiden ganzen Functionen:

$$s = \mathcal{G} / g_0.$$

Sa. 19.12.91.

c) Constatiren wir nun, daß man einfach nach dem Riemann'-Roch'schen Satze abzählen kann, wie viele ganze Formen $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots$ ersten, zweiten, ... Grades auf der Riemann'schen Fläche existiren. Es werden nämlich $\frac{\Gamma_1}{z}, \frac{\Gamma_2}{z^2}$, ... solche ganze Functionen $\mathcal{G}_1(z)$, $\mathcal{G}_2(z)$, ... darstellen, welche nirgendwo sonst, als in den m Stellen $z = \infty$, unendlich werden und in diesen höchstens

1-fach, 2 fach, ... Bezeichnen also σ_1, σ_2 .. die „Ueberschüsse", welche zu den genannten m Stellen gehören, jenachdem man sie nur einfach oder doppelt .. zählt, d. h. die Zahl der Differentiale dw, welche in den m Stellen gleich δ, oder gleich δ^2 .. werden, so werden wir einfach haben:

Zahl der linear-unabhängigen Γ_1: $m+1-p+\sigma_1$,
Zahl der linear-unabhängigen Γ_2: $2m+1-p+\sigma_2$.

. . . .

Eine besonders einfaches Beispiel giebt natürlich wieder die zweiblättrige Fläche des hyperelliptischen Falles. Inzwischen wollen wir hier ein anderes Beispiel ausführen, das für uns in der Folge besonders wichtig wird, nämlich das Beispiel der allgemeinen $(2p-2)$ blättrigen kanonischen Fläche. Wir haben da $\sigma_1 = 1$, oder $\sigma_2 = 0$, ... insofern doch in den $(2p-2)$ Stellen $z = \infty$ kein $dw = \delta^2$, ... werden kann. Daher kommt:

Zahl der Γ_1 : $2p-2+1-p+1 = p$
Zahl der Γ_2 : $4p-4+1-p = 3p-3$
Zahl der Γ_3 : $5p-5$ (unter denen die Verzweigungsform Σ einbegriffen sein wird)
Zahl der Γ_ν : für $\nu > 1$: $(2\nu-1)(p-1)$.

Neben z_1, z_2 treten hier also noch $(p-2)$ andere lineare Formen auf. Aber diese linearen Formen sind uns von anderer Seite wohlbekannt. Man beachte, daß $\int I_1(z\,dz) : \Sigma$ notwendig ein überall endliches Integral sein muß. Die p zu unserer kanonischen Fläche gehörigen linearen Formen verhalten sich einfach wie die Differentiale der p zur Fläche gehörigen überall endlichen Integrale, d. h. wie

$$dw_1 : dw_2 : \dots\dots dw_p$$

Wir werden diese linearen Formen in der Folge im Anschlusse an die bei zahlreichen Autoren übliche Bezeichnungsweise mit

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots\dots\dots \varphi_p$$

benennen. Diese Formen φ haben für alle auf das algebraische Gebilde bezüglichen Fragestellungen eine ganz besondere Wichtigkeit. Beispielsweise haben die φ die ausgezeichnete Eigenschaft, daß sich alle I_2 als rationale ganze Verbindungen 2ten Grades der φ darstellen lassen, alle I_3 unserer Fläche als rationale ganze cubische Verbindungen der φ, u. s. w. f. Ich werde das dahin kurz ausdrücken, daß ich sage: die φ bilden ein volles Formensystem unserer kanonischen

Fläche. Dies ist natürlich noch erst besonders zu beweisen, (wobei ich schon hier auf Nöther, Annalen 17, 1880 verweisen kann). An sich wäre nur nötig, daß die rationalen, ganzen, quadratischen Verbindungen der φ unter den Γ_2, die es auf unserer Fläche überhaupt giebt, einbegriffen sind.

d) Darstellung aller ganzen Functionen, bez. Formen einer allgemeinen m-blättrigen Fläche durch eine derselben.

Wir nehmen jetzt die Untersuchungen der Nr. 2) darüber, wie sich eine beliebige algebraische Function S durch eine bestimmte algebraische Function s darstellt, wieder auf, indem wir uns auf ganze Functionen beschränken (an deren Stelle wir dann bald Formen setzen). Dabei machen wir wieder die Annahme allgemeiner Verhältnisse (was die Discriminante angeht). In der Tat soll es sich wieder nicht um Ableitung endgültiger Resultate, sondern um vorläufige Aufklärung des Sachverhaltes handeln.

Sei also $\mathcal{H}$ irgendwelche ganze Function unserer Fläche, welche mit z durch eine Gleichung verbunden ist: $\mathcal{H}^m + q_1\mathcal{H}^{m-1} + q_2\mathcal{H}^{m-2} + \ldots\ldots = 0$, deren Discriminante $D = D_1 \cdot D_2^2$ gesetzt werden

kann, wo der „Verzweigungsfaktor" Q_1 mit dem „Doppelpunktsfaktor" Q_2 keinerlei Bestandteil gemein hat, auch jeder einzelne derselben, gleich Null gesetzt, lauter getrennte Wurzeln z ergiebt.

Sei G irgend eine andere ganze Function der Fläche. Dann haben wir wie früher:

$$G = \sum \frac{g_i}{f'(x_i, z)} \left(\frac{f(x,z)}{x - x_i} \right),$$

oder wenn wir gleichnamig machen und nach den verschiedenen Potenzen von x ordnen:

$$G = \frac{g_0' + g_1' x + g_2' x^2 + \cdots\cdots g_{m-1}' x^{m-1}}{Q}.$$

Da wird man nun umgekehrt fragen, wann ein Ausdruck, wie er hier auf der rechten Seite steht, eine ganze Functionen G der Fläche vorstellen kann? Er tut es sicher, wenn die einzelnen rationalen, ganzen Functionen $g_0', g_1', \ldots$ von z, die im Zähler auftreten, durch Q teilbar sind, es ist die Frage, ob das nötig ist. In dieser Hinsicht findet man nun folgendes Theorem: Es ist in der Tat nötig, daß die $g_0' \ldots g_{m-1}'$ unserer Formel durch das einfache Produkt $Q_1 \cdot Q_2$ teilbar sind. Mit anderen Worten: Jede ganze Function unserer Fläche

kann durch einen Ausdruck folgender Art dargestellt werden:

$$\frac{g'_0 + g'_1 s + g'_2 s^2 + \cdots g'_{m-1} s^{m-1}}{Q_2^2}$$

es wird aber nicht möglich sein, den hier noch auftretenden Nenner Q_2^2 weiter zu reduciren.

Sei, um dies zu beweisen, $(z - z^{(1)})$ ein Linearfactor von Q_1^2, $(z - z^{(2)})$ ein solcher von Q_2^2. Wir werden der Reihe nach prüfen, wann der Ausdruck

$$a) \quad \frac{g'_0 + g'_1 s + \cdots\cdots g'_{m-1} s^{m-1}}{z - z^{(1)}}$$

oder der Ausdruck:

$$b) \quad \frac{g'_0 + g'_1 s + \cdots\cdots g'_{m-1} s^{m-1}}{z - z^{(2)}}$$

oder endlich der Ausdruck

$$c) \quad \frac{g'_0 + g'_1 s + \cdots\cdots g'_{m-1} s^{m-1}}{(z - z^{(2)})^2}$$

eine ganze Function unserer Riemann'schen Fläche sein kann. Wir gebrauchen zu dem Zwecke geometrische Redeweise. Der Gleichung, welche zwischen s und z besteht, zuordnen wir eine „Grundcurve". Dieselbe wird von einer „verticalen" Geraden $(z - z^{(1)}) = 0$ in m beweglichen Punkten geschnitten. Jeder der Ausdrücke a), b), c) liefert

uns durch Nullsetzen eines Zählers eine „Zählercurve". Eine solche „Zählercurve" wird von einer vertikalen Geraden $(z-z^{(1)}) = 0$, allgemein zu reden, in $m-1$ Punkten geschnitten. Kommen mehr Schnittpunkte, so muss deren Zahl gleich ∞ sein. d.h. die vertikale Gerade muss einen Bestandteil der Zählercurve ausmachen. Dann aber ist $(z-z^{(1)})$ notwendig in all' den einzelnen $g_0', g_1' \ldots$ als Faktor enthalten.

Denn aus

$$g_0' + g_1' w + \cdots g_{m-1}' w^{m-1} = (z-z^{(1)}) [g_0'' + g_1'' w + \cdots g_{m-1}'' w^{m-1}]$$

folgt wegen der Irreducibilität der Grundcurve.:

$$g_0' = (z-z^{(1)}) g_0'', \; g_1' = (z-z^{(1)}) g_1'' \ldots\ldots$$

Nehmen wir nun zunächst den Fall a). Die „vertikale" Gerade $z - z^{(1)} = 0$ hat mit der Grundcurve m Punkte gemein, von denen zwei in einen „Berührungspunkt" zusammenrücken. Durch eben diese Punkte muss, damit a) eine ganze Function vorstellen kann, auch die Zählercurve hindurchlaufen. Insbesondere muss letztere die vertikale Gerade im „Berührungspunkte" ebenfalls berühren. Daher hat sie mit der vertikalen Geraden m Punkte gemein. Daher u.s.w., so dass der Nenner $(z-z^{(1)})$ im Ausdrucke a) nur scheinbar vorhanden ist, indem er gegen die

$g_0', g_1' \dots$ einzeln weggehoben werden kann.

Anders im Falle b). Da fallen von n Schnittpunkten der vertikalen Geraden $(z - z^{(2)}) = 0$ zwei in den Doppelpunkt der Grundcurve, und durch diesen braucht dann damit b) eine ganze Function sei, die Zählercurve nicht etwa doppelt durchzulaufen. Daher wird sich jetzt das $(z - z^{(2)})$ des Nenners keineswegs gegen die $g_0', g_1', \dots$ des Zählers einzeln wegzuheben brauchen; wir müssen, damit b) eine ganze Function sei, nur dafür Sorge tragen, daß die Zählercurve durch besagten Doppelpunkt und die $n - 2$ weiteren auf der vertikalen Geraden $z - z^{(2)} = 0$ gelegenen Punkte der Grundcurve je einfach hindurchläuft. Im Falle c) wird sich die Sache wieder mehr nach dem Schema a) gestalten. Wir müssen jetzt einmal verlangen, daß die Zählercurve durch die zuletzt genannten $n - 2$ Schnittpunkte der Grundcurve hindurchgeht, und in ihnen, – falls sie dort nicht einen Doppelpunkt haben sollte – die Grundcurve berührt. Dann aber müssen wir verlangen, daß die Zählercurve im Doppelpunkte der Grundcurve selber einen Doppelpunkt hat. Aber dies bringt mit sich, daß

sie mit der vertikalen Geraden $(z - z^{(2)}) = 0$ wieder mindestens m Punkte gemein hat. Daher u.s.w., woraus dann folgt, daß der Fall c) keine selbständige Bedeutung hat, sondern auf den Fall b) zurückkommt.

Von hieraus folgt jetzt sofort die behauptete allgemeine Darstellung aller G in der Gestalt

$$\frac{g_0'' + g_1'' \mathcal{H} + \dots g_{m-1}'' \mathcal{H}^{m-1}}{\mathfrak{D}_2}$$

Setzen wir es formentheoretisch um, so erhalten wir die Darstellung einer beliebigen Form Γ durch eine gegebene Form K und z_1, z_2 in der Gestalt:

$$\Gamma = \frac{g_0(z_1 z_2) + g_1(z_1 z_2) K + \dots g_{m-1}(z_1 z_2) K^{m-1}}{\Delta_2},$$

wo der Zähler an allen den Stellen der Grundcurve, in denen $\Delta_2 = 0$, einfach zu verschwinden hat und übrigens der ganze Ausdruck natürlich in z_1, z_2 homogen sein wird.

e) Der Uebergang zur Minimalbasis $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}$

Die gerade erhaltene Formel kann noch nicht befriedigen. Wenn man denn einmal mit Formen operirt, so wird man auch formal nur mit ganzen Functionen operiren wollen, man wird

die Γ so darstellen wollen, dass in ihrem Ausdruck überhaupt kein Nenner mehr auftritt. Dies kann man in der Tat, wie Kronecker sowie Dedekind und Weber gefunden haben (vergl. l.c.) immer erreichen. Man muss nur darauf verzichten, das beliebige Γ aus den successiven Potenzen

$$K^0,\ K^1,\ K^2, \ldots\ldots K^{m-1}$$

einer einzelnen K linear zusammenzusetzen, man wird vielmehr lineare Zusammensetzung aus m zweckmässig gewählten nebeneinanderstehenden Formen: $K_0,\ K_1,\ K_2, \ldots\ldots K_{m-1}$ anstreben. Wir nennen jedes Aggregat von m Formen, durch welches sich die sämmtlichen Γ linear ausdrücken lassen (mit Coefficienten, die rational von z_1, z_2 abhängen) eine Basis der Γ. Das hier gesuchte Aggregat, bei welchem die Coefficienten auch noch ganz in z_1, z_2 werden, bei dem also die einfache Darstellung resultirt:

$$\Gamma = g_0(z_1 z_2) K_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots g_{m-1}(z_1 z_2) K_{m-1}.$$

nennen wir aus Gründen, die bald hervortreten werden, eine Minimalbasis.

Es ist leicht, sich von der Zusammensetzung einer solchen Minimalbasis (die Existenz derselben wollen wir erst hernach beweisen) eine gewisse

Vorstellung zu machen. Wir denken uns die K_0, K_1, K_2, ... nach ihrem Grad in z_1, z_2 geordnet. Dann überlegen wir folgendermaßen:

1) Es giebt auf unserer R. Fläche ein einziges Γ nullter Dimensionen, das ist $\Gamma = C$. durch dieses Γ muss in unserer Formel enthalten sein. Wir schliessen daß $K_0 = C$, oder wie wir der Bequemlichkeit halber sagen wollen, daß $K_0 = 1$ sein muß.

2). Mit Hülfe von K_0 kann man nun zwei Γ vom ersten Grade bilden, nämlich $z_1 . K_0$ und $z_2 . K_0$. Aber es gab auf unserer R. Fl. überhaupt $m+1-p+\sigma_1$ Formen Γ vom ersten Grad. Wir schliessen, daß unter den hinter K_0 folgenden K $(m+\sigma_1-p-1)$ vorhanden sein müßen: $K_1, K_2, \ldots K_{m+\sigma_1-p-1}$, welche den ersten Grad besitzen.

3). Nun setzen wir aus $K_0, \ldots K_{m+\sigma_1-p-1}$ mit Hülfe geeigneter Factoren $g(z_1, z_2)$ im Ganzen $3+2(m+\sigma_1-p-1)$ Formen Γ vom zweiten Grade zusammen. Sind damit die Γ zweiten Grades, die es giebt, (wir haben deren Zahl früher zu $2m+\sigma_2+1-p$ bestimmt) noch nicht erschöpft, so ist der Ueberschuß unter die folgenden K aufzunehmen etc. etc. Beispiel: Die kanonische Fläche mit $2p-2$ Blättern. Wir fanden eben als

Zahl der zugehörigen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \cdots$ $p, 3p-3, 5p-5, \cdots$

Die Minimalbasis wird folgendermassen zusammengesetzt sein:

a) $K_0 = 1$

b) $K_1 \cdots K_{p-2}$ sind lineare Formen (diejenigen linearen Formen, welche noch neben z_1, z_2 auf der Fläche existiren)

c). $(p-2)$ quadratische Formen: $K_{p-1} \cdots K_{2p-4}$

d) eine cubische Form K_{2p-3}

Di. 22.12.91.

Andererseits erkennen wir, indem wir die Existenz der Minimalbasis annehmen auf das Leichteste, dass die Discriminante Δ einer beliebigen Form $\Gamma(z_1 z_2)$ allgemein immer in $\Delta_1 \Delta_2$ zerfällt, wo Δ_1 ein wesentlicher, d. h. bleibender Bestandteil ist, Δ_2 aber mit der Auswahl von Γ wechselt (also ausserwesentlich ist).

Wir wollen diesen Satz erst noch verallgemeinern, ehe wir ihn beweisen.

Die Formen: $1, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots\ldots \Gamma_{m-1}$

einerseits, die Formen: $K_0, K_1, K_2, \ldots\ldots K_{m-1}$

der Minimalbasis andererseits sind uns nur ein Beispiel fur m solche Formen

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots\ldots \Delta_{m-1},$$

zwischen denen keine Identität:

$$\gamma_0 \Delta_0 + \gamma_1 \Delta_1 + \cdots\cdots \gamma_{m-1} \Delta_{m-1} = 0.$$

besteht, unter den γ rationale, ganze Formen der $z_1 z_2$ verstanden. Solche m Formen $\Delta_0 \cdots$ wollen wir überhaupt eine <u>Basis</u> nennen und nun unter der <u>Discriminante der Basis</u> das folgende Quadrat verstehen:

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{0,0} & \Lambda_{0,1} & \cdots\cdots & \Lambda_{0,m-1} \\ \Lambda_{1,0} & \Lambda_{1,1} & \cdots\cdots & \Lambda_{1,m-1} \\ & & & \\ \Lambda_{m-1,0} & \Lambda_{m-1,1} & \cdots & \Lambda_{m-1,m-1} \end{vmatrix}^2$$

(d. h. Die zweiten Indices beziehen sich darauf, daß wir die Blätter der R. Fl. mit $0, \ldots (m-1)$ numeriren und nun unsere Λ in diesen verschiedenen Blättern betrachten!)

Dieselbe ist immer eine rationale, ganze Form der z_1, z_2 die wir nun allgemein als Δ bezeichnen wollen. <u>Auch dieses Δ wird sich in der Gestalt $\Delta_1 \Delta_2^2$ darstellen lassen.</u>

Zum Beweise drücke man einfach die $\Lambda_0, \cdots \Lambda_{m-1}$ durch die Formen der Minimalbasis aus, und substituire die entstehenden Ausdrücke die folgendermaßen lauten mögen:

$$\Lambda_0 = \gamma_{00} K_0 + \gamma_{01} K_1 + \cdots\cdots + \gamma_{0,m-1} K_{m-1}$$
$$\Lambda_1 = \gamma_{10} K_0 + \cdots\cdots\cdots + \gamma_{01m-1} K_{m-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Lambda_{m-1} = \gamma_{m-1,0} K_0 + \cdots\cdots\cdots + \gamma_{m-1,m-1} K_{m-1}$$

in den vorstehenden Determinantenausdruck.

Derselbe zerfällt alsdann sofort in das Produkt zweier Determinanten, so daß wir für Δ folgende Darstellung finden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{0,0} & \cdots & K_{0,m-1} \\ K_{1,0} & \cdots & K_{1,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{m-1,0} & \cdots & K_{m-1,m-1} \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} \gamma_{0,0} & \cdots & \gamma_{0,m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m-1,0} & \cdots & \gamma_{m-1,m-1} \end{vmatrix}^2$$

Hier ist das erste Quadrat, welches wir gleich Δ_1 setzen, einfach die Discriminante der Minimalbasis, d.h. in der Tat von der Auswahl der Basis Δ_1 unabhängig. Das zweite Quadrat aber ist als Δ_2^2 zu bezeichnen, weil doch die Determinante der $|\gamma_{ik}|$ an sich eine ganze rationale Form der z_1, z_2 ist.

Man erkennt hiernach insbesondere, warum wir die Bezeichnung „Minimalbasis" wählen: sie stellt diejenige Basis vor, welche die kleinste Discriminante besitzt. Zugleich liegt auf der Hand, welches die geometrische Bedeutung dieser „kleinsten" Discriminante sein wird. Gleich Null gesetzt, wird sie diejenigen Stellen der z-Ebene ohne alle fremden Bestandteile liefern, über denen sich Verzweigungspunkte unserer Riemann'schen Fläche

befinden, und zwar mit derjenigen Multiplicität, welche der Summe der Multiplicitäten der über ihr liegenden Verzweigungspunkte entspricht. *)

Aber die Summe aller Multiplicitäten aller Verzweigungspunkte ist, wie wir wissen, = 2m + 2p - 2.

Andererseits ist der Grad unserer Minimaldiscriminante $2\sum v_i$, unter $v_0, v_1 \cdots\cdots v_{m-1}$ die Gradzahlen der $K_0 \cdots K_{m-1}$ verstanden. Daher kommt die Formel:

$$m+p-1 = \sum_0^{m-1} v_i \text{ oder } p = \sum_i^{m-1} (v_i - 1). -$$

Wir bringen nunmehr den Beweis, dass wirklich immer, bei beliebig vorgegebener m-blättrigen Riemann'schen Fl. eine Minimalbasis $K_0, K_1, \ldots \ldots K_{m-1}$ existirt. Wir führen den Beweis, indem wir zeigen, wie man sich von irgend einer Basis $\Lambda_0, \Lambda_1, \cdots \Lambda_{m-1}$ beginnend eine Minimalbasis durch eine endliche Anzahl von Schritten herstellen kann. Zu dem Zwecke denken wir

---

*) Dieser schöne Satz wird bei Dedekind etc., nicht besonders hervorgehoben, gleich als gingen die Arithmetiker darauf aus, nicht sowohl die Verbindung ihrer Theorien mit den Riemann'schen Anschauungen herzustellen, sondern letztere ganz bei Seite zu lassen.

uns die $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots$ nach ansteigenden Gradzahlen geordnet. Jetzt prüfen wir, ob es Formen Γ giebt, die sich aus Λ_0 und Λ_1, oder aus Λ_0, Λ_1 und Λ_2, oder aus den ersten vier Λ_i u. s. w. fort linear zusammensetzen lassen, aber nur so linear zusammensetzen lassen, dass ein Nenner auftritt. Sicher müssen wir schliesslich zu Formen Γ dieser Art kommen, widrigenfalls die $\Lambda_0 \dots \Lambda_{m-1}$ bereits an sich eine Minimalbasis bilden, wo-rauf nichts zu beweisen ist. Sei etwa:

$$\Gamma = \frac{\gamma_0(z_1 z_2)\Lambda_0 + \gamma_1(z_1 z_2)\Lambda_1 + \gamma_2(z_1 z_2)\Lambda_2}{\delta(z_1 z_2)}$$

die erste derartige Form. Wir werden dann aus Γ eine andere Form Γ'' derselben Eigenschaft herstellen, die wir dann statt Λ_2 in unserer Basis aufnehmen, worauf diese, wie sich zeigen wird, entweder bereits zur Minimalbasis geworden ist, oder doch einer solchen um einen endlichen Schritt angenähert ist.

Wollen wir zunächst den Nenner $\delta(z_1 z_2)$ in einen linearen Faktor und einen sonstigen Bestandteil spalten:

$$\delta = (a_1 z_1 + a_2 z_2) \cdot \delta'.$$

Wir bilden dann: $\delta' \Gamma = \Gamma'$,

das nur noch einen linearen Nenner hat:

$$\Gamma' = \frac{\gamma_0' \Lambda_0 + \gamma_1' \cdot \Lambda_1 + \gamma_2' \cdot \Lambda_2}{a_1 z_1 + a_2 z_2},$$

und knüpfen unsere weitere Betrachtung an diese Γ' an. Wir vereinfachen dasselbe zunächst so, daß wir eine lineare Substitution ausgeübt denken, durch welche der Nenner $a_1 z_1 + a_2 z_2$ in z_2' übergeht. Wir denken ferner $\gamma_0', \gamma_1', \gamma_2'$ nach Potenzen von z_1', z_2' geordnet:

$$\gamma_0' = c_0' \cdot z_1'^{\nu_0} + \cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_1' = c_1' \cdot z_1'^{\nu_1} + \cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_2' = c_2' \cdot z_1'^{\nu_2} + \cdots\cdots\cdots$$

Hier sind die sämmtlichen nicht hingeschriebenen Glieder durch z_2' teilbar und liefern also für sich eine ganze Function, die wir bei Seite lassen. Aus den stehenbleibenden Gliedern heben wir endlich $z_1'^{\nu_2}$ als einen Factor heraus. Dies geht, weil der Homogeneität halber $\nu_0 \geq \nu_1 \geq \nu_2$ sein wird. Auch wird der Rest nach wie vor eine ganze Function sein. Diese ganze Function ist es, die wir mit Γ'' bezeichnen:

$$\Gamma'' = \frac{c_0' z_1'^{\nu_0 - \nu_2} \Lambda_0 + c_1' z_1'^{\nu_1 - \nu_2} \Lambda_1 + c_2' \Lambda_2}{z_2'}$$

In der Tat dürfen wir jetzt diese Γ'' statt Λ_2

in unsere Basis einführen. Denn c_i' in der vorstehenden Formel ist $\gtrless 0$: wäre es $= 0$, so hätten wir ja schon aus Λ_0 und Λ_i eine Form zusammen setzen können, welche notwendig einen Kenner aufweist, entgegen unserer Voraussetzung. Dabei ist der Grad von Γ um eine Einheit niedriger als der Grad von Λ_i. Daher ist unsere Basis in der Tat gebessert: *denn ihre Discriminante ist ihrem Grade nach um zwei Einheiten herabgedrückt*

Die gebesserte Basis ordnen wir nun wieder nach den Gradzahlen ihrer Formen und wiederholen an ihr (falls sie noch keine Minimalbasis sein sollte) genau die gerade geschilderten Operationen etc. etc.

Daß wir auf dem Wege endlich, nach einer endlichen Zahl von Schritten, zu einer Minimalbasis kommen müssen, ist klar, *denn bei jedem einzelnen Schritte sinkt der Grad der Basisdiscriminante um zwei Einheiten, und es kann doch dieser Grad unmöglich negativ werden.*

Wir erläutern kurz, wie die Formen der Minimalbasis mit $z_1\, z_2$ und unter einander durch m Gleichungen verbunden sein werden. K_0 nimmt dabei natürlich eine besondere Stellung ein, weil er $=$ Const ist. Sei also K_ν eine von K_0 verschiedene Form der Minimalbasis. So wird man sich folgendes Gleichungssystem bilden können:

$$
\text{(I)}\quad
\begin{aligned}
K_\nu K_0 &= \gamma_{0,0} K_0 + \gamma_{0,1} K_1 + \cdots \gamma_{0,m-1} K_{m-1},\\
K_\nu K_1 &= \gamma_{1,0} K_0 + \gamma_{1,1} K_1 + \cdots \gamma_{1,m-1} K_{m-1},\\
&\;\;\vdots\\
K_\nu K_{m-1} &= \gamma_{m-1,0} K_0 + \cdots \gamma_{m-1,m-1} K_{m-1}.
\end{aligned}
$$

wo die γ_{ik} rationale ganze Formen der z_1, z_2 sind. (und natürlich die $\gamma_{0,0}, \gamma_{0,1}, \ldots \gamma_{0,m-1}$ sehr einfache Werte haben) Setzen wir hier die linker Seite stehenden Glieder nach rechts hinüber und eliminiren die dann linear hervortretenden $K_0 \ldots K_{m-1}$, so erhalten wir die Gleichung m^{ten} Grades für K_ν in folgender Form:

$$
\text{(II)}\quad
\begin{vmatrix}
\gamma_{00} - K_\nu & \gamma_{01} & \cdots & \gamma_{0,m-1}\\
\gamma_{10} & \gamma_{11} - K_\nu & \cdots & \gamma_{1,m-1}\\
\vdots & & & \vdots\\
\gamma_{m-1,0} & \gamma_{m-1,1} & \cdots & \gamma_{m-1,m-1} - K_\nu
\end{vmatrix} = 0
$$

Haben wir durch sie K_ν als Funktion von z_1, z_2 bestimmt, so würden wir die uns noch fehlenden $m-2$ der Formen $K_1 \ldots K_{m-1}$ aus irgend $(m-2)$ der Gleichungen (I) linear berechnen.

Soviel über die Formen $\Gamma(z_1, z_2)$ auf unserer m-blättrigen Riemann'schen Fläche.

Wir untersuchen jetzt näher, welche Bewandniß es mit der Darstellung irgendeiner algebraischen Funktion f unserer Fläche als Quotient zweier Formen hat:

$$f = \Gamma_1(z_1, z_2) : \Gamma_2(z_1, z_2) \quad {}^{*)}.$$

Zu dem Zwecke ist es nützlich, gewisse Erläuterungen über Punktgruppen auf der Riemann'schen Fläche einzuschalten, die später doch nötig werden.

Diese Erläuterungen schliessen sich der Sache nach größtenteils an die Arbeit von Brill und Noether im Bd. 7 der Annalen an; in der Terminologie folge ich zum Teil Dedekind und Weber (und zwar aus Gründen, die ich noch genauer angebe).

---

*) Wir können da natürlich sofort die Formen der Minimalbasis einführen u. also schreiben: $f = \sum_0^{m-1} \gamma_\mu^{(1)} K_\mu : \sum_0^{m-1} \gamma_\mu^{(2)} K_\mu$.

Zwei Punktgruppen Π_1 und Π_2 der Riemann'schen Fläche sollen aequivalent heissen (B. N. „corresidual"), wenn es eine algebraische Function der Fläche giebt, deren Nullpunkte nach Π_1 und deren Unendlichkeitspunkte nach Π_2 fallen. Dies schliesst natürlich ein, dass die beiden Punktgruppen gleich zahlreich sind und keinen Punkt gemein haben. Uebrigens ist die Beziehung von Π_1 und Π_2 eine gegenseitige. Denn wenn f in den Punkten von $\Pi_1 = 0$ und in den Punkten von $\Pi_2 = \infty$ wird, so wird $1/f$ welches doch auch eine algebraische Function der Fläche ist, in den Punkten von $\Pi_2 = 0$ und in den Punkten von $\Pi_1 = \infty$. Zur Aequivalenz von Π_1, Π_2 wird überhaupt ausreichen, wenn es ein f giebt, welches in den Π_1 den constanten Wert c_1, in den Π_2 den Wert c_2 annimmt. Denn es wird dann $\frac{f-c_1}{f-c_2}$ in den Π_1 zu 0, und in den Π_2 zu ∞. — Aus dem Gesagten geht hervor, dass überhaupt alle die ∞^1 Punktgruppen, in denen $f = c$ wird, untereinander aequivalent sind. Insofern diese Gleichung die Constante c linear enthält, werden wir die gefundene Schaar von Punktgruppen eine einfach unendliche lineare Schaar

aequivalenter Punktgruppen nennen. Solch eine lineare Schaar haben wir beispielsweise vor Augen, wenn wir bei unserer m-blättrigen Fläche die Gruppen von jedesmal m Punkten betrachten, die an irgend einer Stelle der z-Ebene übereinander liegen. Umgekehrt wird man jeder linearen Schaar aequivalenter Punktgruppen die hier vorliegende, geometrische Anordnung geben können, sobald man das zugehörige f dazu benutzt, unsere Riemann'sche Fläche über die f-Ebene conform auszubreiten.

Es wird kaum nötig sein, jetzt noch besonders zu sagen, was eine mehrfach unendliche, lineare Schaar aequivalenter Punktgruppen sein soll. Die einfachsten Beispiele giebt wieder die über der z-Ebene ausgebreitete Fläche. Die Formen ersten, zweiten, dritten ... Grades, die auf dieser Fläche existiren, bilden je eine lineare Schaar, sagen wir mit m_1, m_2 ... linear vorkommenden Parametern.

Setzen wir die Formen ersten Grades nun = 0, so liefert uns das eine (m_1-1) fach unendliche, lineare Schaar von Punktgruppen, ebenso geben die Formen zweiten Grades eine (m_2-1) fach

unendliche Schaar etc. etc. Wir wollen diese Punktgruppen bez. Schaaren als *Normalgruppen* bez. *Normalschaaren* bezeichnen. „Normal" sind dieselben natürlich nur, insofern wir an die m-blättrige Fläche über der z-Ebene anknüpfen, sie sind nicht etwa auf der abstracten Riemann'schen Fläche vor anderen ausgezeichnet.

Mögen wir nun noch eine *Erweiterung* des Aequivalenzbegriffes eintreten lassen. Es sei Π irgendwelche Punktgruppe. Ferner seien Π_1 und Π_2 im früheren Sinne aequivalent. Dann wollen wir auch $\Pi_1 \Pi$ und $\Pi_2 \Pi$ aequivalent nennen, [wo die Zusammenstellung der beiden Π einfach aussagt, daß wir die beiden Punktgruppen zusammennehmen]. Zwei Punktgruppen werden jetzt also aequivalent heißen können, wenn sie eine Anzahl Punkte gemein haben.

Danach können wir z. B. den Riemann-Roch'schen Satz als einen Satz über Punktgruppen aussprechen. Seien irgend m Punkte gegeben mit dem „Ueberschuß" σ, so giebt es, wie wir wissen, $\infty^{m-p+1+\sigma}$ Functionen:

$$F = c_1 F_1 + \ldots\ldots c_{m-p+\sigma} F_{m-p+\sigma} + c,$$

deren Unendlichkeitsstellen in diesen m Punk-

ten liegen. Wir denken jetzt an die früher erörterte Möglichkeit, dass nicht sämmtliche m Punkte wirkliche Unendlichkeitsstellen von F sein mögen. Die so hervorkommenden, nicht als Unendlichkeitsstellen benutzten gegebenen Punkte fügen wir jetzt den Nullstellen von F hinzu. So bekommen wir eine neue Punktgruppe, welche mit der Gruppe der gegebenen m Punkte jedenfalls im erweiterten Sinne aequivalent ist. Augenscheinlich bekommen wir den Satz:

Die Gesammtheit der Punktgruppen, welche mit der Gruppe der gegebenen m Punkte aequivalent sind, bildet eine $(m-p+6)$-fach unendliche, lineare Schaar.

Doch wir kehren zu der Frage zurück, wie man eine irgendwie auf der Fläche definirte algebraische Function f durch Formen Γ darstellt. Schreiben wir zu dem Zwecke symbolisch:

$$f = c\,\frac{\Pi_1}{\Pi_2},$$

wo die multiplicative Constante c vorgesetzt ist, um anzudeuten, dass f durch Π_1 und Π_2 allein (die „Zaehlergruppe" und „Nennergruppe", bei Dedekind und Weber: das „Obereck" und „Untereck") nur erst

bis auf einen constanten Factor definirt ist. Da kann es nun sein, dass Π_2 an sich eine Normalgruppe irgend welchen Grades ist. Sollte es nicht der Fall sein, so werden wir in mannigfachster Weise eine Ergänzungsgruppe Π so finden, dass $\Pi_2\,\Pi$ eine Normalgruppe vorstellt. Wir schreiben dann:

$$f = c\,\frac{\Pi_1\,\Pi}{\Pi_2\,\Pi}.$$

Sei nun Γ_2 diejenige algebr. Form, die in Π_2, bez. $\Pi_2\,\Pi$ verschwindet. Das Product $\Gamma_2 \cdot f$ ist dann eine Form, welche nirgendwo unendlich wird, d.h. eben auch eine ganze, algebraische Form die wir mit Π_1 bezeichnen wollen. Wir finden so die gewünschte Darstellung:

$$f = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}.$$

<u>Die Function f lässt sich genau so oft als Quotient zweier Formen Γ darstellen, als Punctgruppen Π gefunden werden können, welche die Gruppe Π_2 der Unendlichkeitspuncte zu einer Normalgruppe ergänzen.</u>

Zugleich aber ergiebt sich der schöne Satz: <u>Eine Gruppe Π, welche Π_2 zu einer Normalgruppe ergänzt, ergänzt auch jede mit Π_2 aequivalente Gruppe Π_1 zu einer solchen.</u>

Ich werde diesen Satz entsprechend einer von *Nöther* in etwas anderer Gedankenverbindung gewählten Bezeichnung als *Restsatz* bezeichnen, genauer als den auf unsere m-blättrige Fläche bezüglichen Restsatz. Dieselbe „Restgruppe" Π ergänzt Π_1 und Π_2 zu einer Normalgruppe. Von hier aus versteht man, daß man Π_1 und Π_2 als „corresidual" bezeichnen kann, wie es Brill und Nöther thun. Nur werden wir uns nicht entschließen wollen, die Aequivalenz zweier Punktgruppen geradezu als Corresidualität bezüglich der Normalgruppen von Hause aus zu definiren. Denn der Aequivalenzbegriff ist ganz unabhängig davon, in welche besondere Form wir die R. Fläche gesetzt denken mögen, der Begriff der Normalgruppe und der an sie anknüpfende Begriff der Corresidualität sind davon abhängig. Die Brill-Nöther'sche Corresidualität ist zwar etwas anders definirt, als wir voraussetzen, aber auch von ihr gilt, daß sie an eine bestimmte Darstellungsform der algebraischen Gebilde anknüpft.

Im Uebrigen ist hier die Stelle, wo wir begreiflich machen können, wie es *Dedekind* und *Weber*, bez. *Kronecker* die Theorie der

Formen Γ (oder, wie sie sagen, ganzen Functionen G) in ihren Arbeiten fortgesetzt mit der Theorie der ganzen algebraischen Zahlen parallelisiren.

Ich gehe hierauf um so lieber kurz ein, als wir dadurch von der uns geläufigen Theorie der Γ aus einen ersten Einblick in letztere, wichtige Theorie gewinnen.

Vergleichen wir zunächst die Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen a mit der Theorie der rationalen ganzen Formen von $z_1, z_2 : \gamma(z_1, z_2)$!

Da fanden wir in der Tat beidemal den Zerlegungssatz: daß man a, bez. γ nur auf eine Weise in weiter unzerlegbare Faktoren zerspalten kann, [nämlich a in seine Primfaktoren, γ in seine Linearfaktoren].

Nun ist weiter die Art, wie man von den a zu den algebraischen ganzen Zahlen A schreitet, genau so, wie der Schritt von den γ zu den Γ. Man nennt A eine algebraische ganze Zahl, wenn es einer Gleichung genügt:

$$A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \ldots\ldots \alpha_m = 0,$$

deren höchster Coefficient $= 1$ und deren sämmtliche andere Coefficienten gewöhnliche ganze Zahlen sind. Aus den A gelangt man dann

ferner genau so zu einem „Integritätsbereiche", wie aus dem einzelnen Γ. Dieser Bereich wird von allen Zahlen

$$\frac{\alpha_0 A^0 + \alpha_1 A^1 + \ldots\ldots\ldots \alpha_{m-1} A^{m-1}}{\delta}$$

gebildet werden, (α, δ gewöhnliche ganze Zahlen), die selber ganze algebraische Zahlen sind! Der Nenner δ ist dabei notwendig ein Teiler derjenigen ganzen Zahl, welche sich bei der Discussion der für A geltenden Gleichung als „außerordentlicher Teiler der Discriminante" ergiebt.

Die Zahlen unseres Integritätsbereiches erscheinen hier auf die „Basis"

$$A^0, A^1, \ldots\ldots\ldots A^{m-1}$$

bezogen. Man wird statt ihrer irgendwelche andere „Basis" einführen können. Und nun zeigen Ueberlegungen, die genau den früheren nachgebildet sind, daß es insbesondere immer eine „Minimalbasis" $B_0, B_1, \ldots\ldots B_{m-1}$ giebt, d. h. eine Basis, durch deren ganze Zahlen sich alle Zahlen des Integritätsbereiches in der Gestalt $\alpha_0 B_0 + \alpha_1 B_1 + \ldots\ldots \alpha_{m-1} B_{m-1}$ darstellen lassen.

Wir fragen jetzt nach den Gesetzen der Fac-

toren-Zerlegung. Da tritt nun auch bei den $\Gamma(z_1, z_2)$ dieselbe Erscheinung auf, welche zuerst bei den A bemerkt wurde, daß nämlich die Zerlegung in Primfaktoren (d. h. innerhalb des Integritätsbereiches nicht weiter zerlegbare Faktoren) nicht mehr notwendig eine eindeutige ist, womit alle die bequemen Verfahrungsweisen hinfällig werden, die auf dieser Eindeutigkeit beruhen.

Hierfür zunächst zwei Beispiele:

1) Wir betrachten das algebraische Gebilde $s^2 = 2x - 1$, oder homogen geschrieben $\sigma^2 = 2z_1^2 - z_2^2$, und auf ihm die Form zweiten Grades $\Gamma = \sigma^2 - z_1^2 = z_1^2 - z_2^2$.

Dies ist auf zwei verschiedene Weisen in zwei Linearformen zu zerspalten: das eine Mal haben wir $\Gamma = (\sigma + z_2)(\sigma - z_1)$, das andere Mal $\Gamma = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$.

Und diese Zerspaltungen sind nicht weiter aufeinander reduzierbar, da es doch (innerhalb unseres Integritätsbereiches) nicht angeht eine Linearform weiter zu zerlegen.

2) Wir betrachten die algebraischen ganzen Zahlen der Gestalt:

$$\alpha = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\sqrt{-5}}{\delta}$$

Eine solche Zahl genügt der quadratischen Glei-

chung: $$a^2 + \frac{2\alpha_0}{\delta} \cdot a + \frac{\alpha_0^2 + 5\alpha_1^2}{\delta^2} = 0$$

Hier folgt zunächst, damit die Coefficienten der Gleichung ganzzahlig sind, $\delta = 1$, also $a = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{-5}$, was besagt, daß für unseren Integritätsbereich 1 und $\sqrt{-5}$ eine Minimalbasis bilden. In diesem Integritätsbereich sind nun, wie ich behaupte, die Zahlen 3 und 7 nicht weiter zerlegbar. Man müßte sonst 3 oder $7 = (\alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{-5})(\alpha_0 - \alpha_1 \sqrt{-5}) = \alpha_0^2 + 5\alpha_1^2$ setzen können. Dies würde sagen, daß 3 bez. 7, modulo 5 zu α_0^2 congruent wären, was nicht angeht, weil 3 bez. 7, modulo 5 Nichtreste sind. Aber nun nehme man das Produkt $3 \cdot 7 = 21$! Dasselbe kann seinerseits wohl in zwei complexe Zahlen unseres Bereiches gespalten werden: $21 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$

Die hier zu Tage tretende Unzuträglichkeit überwindet man in der Zahlentheorie bekanntlich durch Einführung <u>idealer</u> Factoren (neben den <u>wirklichen</u> Factoren) Und nun ist die Sache die, daß man nicht nur ohne Weiteres ganz den gleichen Schritt bei den Γ machen kann (wie Kronecker und Dedekind-Weber hervorheben), sondern daß man denselben vermöge der von uns bereits entwickelten Anschauungen bei den Γ besonders ein-

fach versteht, womit dann der entsprechende Ansatz der Zahlentheoretiker leichter zugänglich wird. Wir haben zu dem Zwecke nur an die *Punktgruppe der* Riemann'schen Fläche zu denken, in deren Punkten Γ verschwindet und nun Γ als das Produkt gedachter (idealer, nicht wirklich vorhandener) algebraischer Formen aufzufassen, *deren jede nur in einem Punkte der Riemann'schen Fläche verschwindet* (so daß uns also jeder Punkt der Riemann'schen Fläche einen Primfaktor vorstellt).

Diese Idee, vermöge deren selbstverständlich die Eindeutigkeit der Zerlegung in Primfaktoren wieder hergestellt wird, ist nur eine andere Einkleidung dafür, daß man zwecks Diskussion der zwischen den Γ bestehenden Relationen immer an die Punktgruppe denkt, die von den Verschwindungspunkten der Γ gebildet werden.

Nehmen wir das eben betrachtete Beispiel $\Gamma = (\sigma + z_1)(\sigma - z_1) = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$ wieder auf. Dasselbe wird, wenn wir die Gruppen der Verschwindungspunkte heranziehen, in der Tat sofort verständlich. $\Gamma = 0$ liefert auf der in Betracht kommenden zweiblättrigen Fläche 4 Stellen, die wir schematisch so andeuten mögen:

$\sigma + z_1 = 0$

$z_1 + z_2 = 0$ $\quad$ $\sigma - z_1 = 0$ $\quad$ $z_1 - z_2 = 0.$

Und diese werden bei unserer Factorenzerlegung einfach auf zwei Weisen, das eine Mal so, wie die horizontalen Klammern andeuten, das andere Mal so wie sie übereinanderliegen, zu Nullstellen von Linienformen zusammengefaßt. Das drückt man denn in der Idealtheorie so aus: *Γ hat vier ideale Factoren, die durchaus bestimmt sind.* Die Doppelformel $\Gamma = (\sigma + z_1)(\sigma + z_2) = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$ besagt nur, daß man diese 4 Factoren auf zwei Weisen *zu wirklichen Factoren zusammenfassen kann.*

So. 9.I.92. Genau so erklärt man in der Zahlentheorie die eben gefundene Gleichung $3.7 = (1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5})$ in der Weise, daß man sich die Zahl 21 in vier ideale Factoren $\xi_1\ \xi_2\ \eta_1\ \eta_2$ zerlegt denkt, wo dann etwa $3 = \xi_1 \xi_2$, $7 = \eta_1 \eta_2$, $1+2\sqrt{-5} = \xi_1 \eta_1$, $1-2\sqrt{-5} = \xi_2 \eta_2$ zu setzen sein wird. Natürlich muß man ausdrücklich nachweisen, daß bei der Einführung solcher idealer Factoren sich weder ein Widerspruch noch eine Vieldeutigkeit ergiebt. Dies bedarf langer Entwickelungen, wegen deren man in der Zahlentheorie von *Dedekind-Dirichlet*, 2te oder 3te Auflage, das von *Dedekind* zugefügte letzte Supplement, oder denn die Entwickelungen *Kroneckers* in Crelle 92 vergleichen mag. Hier nur

einige einzelne Bemerkungen:

a) Wie entscheidet man, nach Kronecker, ob zwei Zahlen A_1, A_2 eines Bereiches einen idealen Factor gemein haben? Man bildet sich $u_1 A_1 + u_2 A_2$, wo die u_1, u_2 „unbestimmte Grössen" und bildet dann die „Form", d. h. das Product aller der Werte, die $u_1 A_1 + u_2 A_2$ in den verschiedenen Blättern der definirenden Riemann'schen Fläche (wenn wir uns in solch' übertragener Weise ausdrücken dürfen) annimmt. Wir legen A_1 und A_2 einen gemeinsamen idealen Factor bei, sobald diese Form, unabhängig von den Werten, welche die u_1, u_2 haben mögen, einen wirklichen Factor hat. Heisst der letztere q, so bezeichnet Kronecker den in A_1, A_2 stehenden, idealen Factor geradezu mit

$$\frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{N.(u_1 A_1 + u_2 A_2)} \cdot q.$$

b). Dedekind zieht vor, nicht sowohl von dem „gedachten" Factor zu sprechen, den irgend welche Zahlen A oder Formen Γ gemein haben können, sondern von der Gesammtheit der Zahlen, resp. Formen, welche einen Factor gemein haben, und die ja in allen Fällen etwas Wirkliches, Fassbares ist. Er bezeichnet diese Gesammtheit als ein

„Ideal" und entwickelt beispielsweise, daß jedes Ideal seine aus m Zahlen, bez. Formen bestehende „Minimalbasis" hat etc.

Früher haben wir Formen Γ auf der Riemann'schen Fläche, welche irgendwelche gegebene Verschwindungspunkte besitzen, als „gebundene" Formen oder „adjungirte" Formen bezeichnet. Der Inbegriff solcher gebundenen Formen entspricht also genau der Dedekind'schen Definition des Ideals.

c.) Sehen wir doch, daß wir den Restsatz (demzufolge zwei aequivalente Punktgruppen Π_1, Π_2 je durch dieselbe zutretende Punktgruppe Π zu Normalgruppen ergänzt werden) in die Sprache der Idealtheorie übertragen und zugleich so umkehren, daß er eine Definition der Aequivalenz ist.

Wir erhalten dann: <u>Zwei ideale Faktoren heissen aequivalent, wenn sie mit demselben dritten Faktor multiplicirt wirklich werden.</u> In dieser Form ist der Satz in der Tat seit lange den Zahlentheoretikern geläufig. –

Zum Schlusse bleibt uns noch nachzutragen, wie man auf der m-blättrigen Fläche vermöge der $\gamma . K, \ldots K_{m-1}$ die Integrale erster, zweiter, dritter Gattung darzustellen vermag. Ein solches

Integral stellt sich jedenfalls in der Form dar:

$$\int \Phi_{-2}(z_1 z_2) \cdot [z\,dz].$$

wo Φ_{-2} eine algebraische Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension der z_1, z_2 ist. Aus den Unendlichkeitsstellen von Φ wird man dann sofort auf die Unendlichkeitsstellen des Integrals schliessen. Wir führen das nicht aus, sondern beschränken uns darauf, folgenden Satz anzugeben (den man sofort durch Reihenentwickelung beweist): Hängen an einer Stelle der Fläche ϱ Blätter cyclisch zusammen, so bleibt das Integral an der betr. Stelle so lange endlich, als Φ_{-2} dort nicht stärker als $(\varrho-1)$ fach unendlich wird. Von hier aus wird man die folgende Methode controliren, die Dedekind und Weber für den Aufbau der Integrale erster Gattung entwickelen. Die genannten Autoren bilden aus den verschiedenen Werten, welche die $K_0 \ldots K_{m-1}$ an den verschiedenen Blättern der Fläche besitzen, zuvörderst die Determinante

$$\underline{V} = \begin{vmatrix} K_{0,0} & \cdots\cdots & K_{0,m-1} \\ K_{1,0} & \cdots\cdots & K_{1,m-1} \\ & & \\ K_{m-1,0} & \cdots\cdots & K_{m-1,m-1} \end{vmatrix}$$

(deren Quadrat die Discriminante Δ ist) Berechnen wir dann die Differentialquotienten

$$\frac{\partial \log V}{\partial K_{\mu,0}}, \frac{\partial \log V}{\partial K_{\mu,1}}, \ldots\ldots \frac{\partial \log V}{\partial K_{\mu,m-1}},$$

so sind dies die Werte, welche eine neue Form

$$\Lambda_\mu$$

in den verschiedenen Blättern der Fläche annimmt. Die Reihenfolge

$$\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots \Lambda_\mu, \ldots \Lambda_{m-1}$$

heisst die zur Basis der K <u>complementäre Basis</u>.

Ist K_μ vom Grade ν in den z_1, z_2, so ist Λ_μ vom Grade $-\nu$. Die Integrale erster Gattung stellen sich darauf durch die Formel dar:

$$\int \sum_{\nu \geq 2} \gamma_\mu \cdot \Lambda_\mu \cdot [z\, dz].$$

Hier werden die γ_μ rationale, ganze Formen der z_1, z_2 vom Grade $\nu - 2$, die dementsprechend $(\nu - 1)$ willkürliche Constante enthalten. In der Tat haben wir ja schon früher gelernt, dass $\sum_{\nu \geq 2} (\nu - 1)$ oder, was dasselbe ist $\sum_{\nu \geq 1} (\nu - 1)$ gleich p ist, wie es sein soll. — Wir schliessen dieses lange Kapitel, indem wir noch kurz von der Darstellung der Integrale auf den <u>kanonischen</u> Flächen handeln, wobei ich wegen der näheren Ausführung

durchweg auf meine Arbeit über Abel'sche Funktionen in Bd. 36 der Annalen, bez. auf meine Vorlesung II über Abel'sche Funktionen vom Winter 1888–89 verweise. Der Zweck muss dabei sein, sich davon zu überzeugen, wieviel einfacher die ganze Theorie bei Zugrundelegung der kanonischen Flächen wird, sodass man nicht anstehen wird bei allgemeinen Untersuchungen über algebraische Gebilde, bei denen man sich die m-blättrige Form, in der man das Gebilde behandeln will, beliebig aussuchen darf, immer eine kanonische Form zu Grunde zu legen.

Von der Darstellung der Integrale auf den kanonischen Flächen.

1). Im Falle der kanonischen Fläche war m ein Teiler von $2p-2$:

$$md = 2p-2,$$

und es gab dementsprechend $m(d+2)$ Verzweigungspunkte. Die waren dann die Nullpunkte einer Form $(d+2)^{ten}$ Grades, der „Verzweigungsform" σ. Offenbar können wir die Definition der kanonischen Fläche jetzt auch so aussprechen: „Die Verzweigungspunkte der Fläche bilden eine Normalgruppe," oder auch: „Das Verzweigungs-

ideal der Fläche ist wirklich."

2. Man könnte nun unternehmen, hier genau nach den Vorschriften von Dedekind und Weber zu verfahren, die complementäre Basis der A_μ zu bilden etc. Aber dies würde zu unnötig hohen Bildungen führen. Statt dessen schreiben wir mit Hülfe der Verzweigungsform σ die Integrale erster Gattung gleich in der Form hin:

$$\int \frac{\Gamma_\alpha(z_1 z_2)[z\,dz]}{\sigma(z_1, z_2)},$$

wo Γ irgend eine ganze Form α^{ten} Grades bezeichnet und uns übrigens zum ersten Male der Differentialausdruck

$$\frac{[z\,dz]}{\sigma(z_1, z_2)}$$

entgegentritt, den wir in der Folge mit $d\omega$ bezeichnen. Wir schliessen, dass Γ_α hier genau p willkürliche Constante enthalten muss. Einen besonderen Fall dieser $\Gamma_\alpha(z_1 z_2)$ bilden die rationalen $\gamma_\alpha(z_1 z_2)$ mit $\alpha+1$ willkürlichen Constanten. Im hyperelliptischen (zweiblättrigen) Falle werden die γ_α mit den Γ^α identisch, und die Integrale erster Gattung erscheinen dann, wenn man noch für $\sigma(z_1, z_2)$ den üblichen

Wert $\sqrt{f_{2p+2}(z_1 z_2)}$ einführt in der wohlbekannten Gestalt:

$$\int \frac{\delta_{p-1}(z_1 z_2)\,[z\,dz]}{\sqrt{f_{2p+2}(z_1 z_2)}}$$

Mi. 13.I.92.

3). Ich erwähne ferner die elegante Darstellung der Integrale dritter Gattung in Gestalt von Doppelintegralen, die hier resultirt. Man findet

$$P^{xy}_{\xi\eta} = \int_y^x\int_\eta^\xi \frac{\Psi(z\,\zeta)}{(z\,\zeta)^2}\,d\omega_z\,d\omega_\zeta\,,$$

wo Ψ eine ganze algebraische Form $(\alpha+2)^{\text{ten}}$ Grades sowohl in den z_1, z_2 als den $\zeta_1\zeta_2$ ist, die folgende Eigenschaften hat:

a) Wird $z = \zeta$, ohne daß die zugehörigen Stellen z, ζ auf der Riemann'schen Fläche zusammenfallen, so wird Ψ Null wie $(z\,\zeta)^2$;

b). Fallen aber z und ζ auf der Riemann'schen Fläche zusammen, (so zwar, daß $z_1 = \zeta_1$, $z_2 = \zeta_2$), so geht Ψ in $[\sigma(z_1, z_2)]^2$ über.

Umgekehrt wird jede Form $\Psi(z,\zeta)$ der hiermit beschriebenen Art, in das Doppelintegral eingesetzt, ein Integral dritter Gattung $P^{xy}_{\xi\eta}$ geben.

4). Von hieraus ergiebt sich dann auch eine volle Festlegung der Integrale zweiter Gattung Z^{xy}_{ξ}, was die Abhängigkeit von der Unstetigkeitsstelle angeht. Wir hatten früher geschrieben:

$$Z_t^{xy} = \left\{ dP^{xy}_{\xi,\eta} \,\middle|\, df(\xi) \right\}_{\xi=t},$$

dabei aber unentschieden gelassen, welche Function $f(\xi)$ beim Differentiiren benutzt werden sollte.

Jetzt werden wir jedenfalls setzen wollen

$$Z_t^{xy} = \int_y^x \frac{\Psi(z,t)}{(z\,t)^2}\, dw_z, \text{ d.h. } \left\{ dP^{xy}_{\xi\,\eta} \,\middle|\, dw_\xi \right\}_{\xi=t}$$

Da hat sich also Z, was die Abhängigkeit von der Unstetigkeitsstelle angeht, in eine Form von t_1, t_2 vom $(+d)^{\text{ten}}$ Grade in diesen Variabelen verwandelt. Die hierin liegende Normirung des Z erweist sich als äusserst nützlich; insbesondere wird der Aufbau der algebraischen Functionen aus verschiedenen Summanden Z, wie wir ihn früher besprochen, und damit die Begründung des Riemann-Roch'schen Satzes bei der so festgelegten Normirung wesentlich durchsichtiger.

5) Endlich aber gelingt es, eine von 2 Stellen x, y der Riemann'schen Fläche abhängende Form zu construiren, welche nirgends unendlich wird und nur dann verschwindet, wenn die Stellen $x\,y$ auf der Fläche zusammenfallen, eine Form also, welche dem früher nur postulirten

idealen Primfactor der Fläche entspricht. Diese Form ist nicht völlig bestimmt, sondern kann u. A. in ihrem Grade durch Zufügung eines „nirgends verschwindenden Factors" noch beliebig modificirt werden. Die „Primform", die ich in Annalen 36 mitteile, und die von allen zulässigen Formen die einfachste sein dürfte, hat in den x, bez. y den Grad $-M/2$. Wollen wir aber eine algebraische Form ρ^{ten} Grades Γ_ρ, die in ρm Punkten unserer Fläche verschwindet, als Product von ρm Primfactoren hinschreiben, so müssen wir jedem einzelnen Primfactor offenbar den Grad $\frac{1}{m}$ zuweisen. Eine dahingehende Modification kann der in Bd. 36 benutzten Primform leicht aufgeprägt werden, indem man ihr eine geeignete Potenz der eben dort eingeführten nirgends verschwindenden „Mittelform" zugesellt. So entsteht die neue Primform vom Grade $1/m$ in den x_1, x_2 wie in den y_1, y_2, die ich zur Unterscheidung durch einen horizontalen Strich bezeichnen will:

$$\underline{\Pi(x,y)}$$

Unter den verschiedenen Formeln, durch welche man dieselbe darstellen kann, will ich hier

nur folgende erwähnen, in denen Δ die Discriminante $(2m+2p-2)^{\text{ten}}$ Grades der kanonischen Fläche bedeutet, σ die Verzweigungsform d^{ten} Grades, und $x_0 \ldots\ldots x_{m-1}$ (allgemein x_i) die Stellen sind, die dem Werte x von z auf der Riemann'schen Fläche entsprechen, $y_0 \ldots\ldots y_{m-1}$ aber (allgemein y_k) die Stellen, die dem Werte y von z auf der Fläche zugehören:

$$\Pi(x_0, y_0) = \sqrt[2m]{\frac{(xy)^2\, 2\,\Delta(x_1 x_2)\,\Delta(y_1 y_2)}{\sigma(x_1 x_2)^m\, \sigma(y_1 y_2)^m}} \cdot e^{\frac{1}{2}(m-1)\cdot\sum\sum P^{x_i x_k}_{x_i x_k} - \frac{1}{2}(m-1)m^2 \sum\sum\sum\sum \ldots}$$

Vermöge dieses Π (dessen Eigenschaften wir hier nicht näher studiren) wird sich dann eine Form Γ_ϱ der Fläche, deren Nullstellen nach $y^{(1)} \ldots y^{(m\varrho)}$ fallen mögen, in der Gestalt darstellen lassen:

$$\Gamma_\varrho(x_1 x_2) = C \cdot \prod_{i}^{m\varrho} \Pi(x, y^{(i)}).$$

V. Einige Anwendungen der bislang entwickelten Theorie nebst Andeutungen über deren Weiterbildung.

Will man irgendein Gebiet mathematischer Forschung nach seiner Gliederung überblicken, so ist dazu ein Princip dienlich, von dem ich in meinem Erlanger Antrittsprogramm 1872 bezüglich der verschiedenen in der Geometrie entwickelten Tendenzen Anwendung gemacht habe. Dies Princip besteht darin, daß man immer nach denjenigen Aenderungen fragt, bei denen die gerade betrachteten Entwickelungen invariant bleiben, und nun danach classificirt, jenachdem die Gruppe dieser Aenderungen mehr oder minder ausgedehnt ist.

Dieses Princip werden wir hier auf die Riemann'sche Theorie (soweit wir dieselbe jetzt kennen) anwenden dürfen.

Da finden wir zunächst Entwickelungen, die bei beliebiger eindeutiger Transformation der R. Fläche invariant sind. Dahin gehören die Definition des p einer Fläche, die Definition der kanonischen Schnittsysteme u. s. w.

Weiter Entwickelungen, die wenigstens bei eindeutiger conformer Transformation der Fläche

invariant sind. Das ist die ganze Lehre von den auf der Fläche existirenden Potentialen und Functionen, ferner von den Moduln der Fläche etc.

Viel enger ist die Gruppe von Aenderungen, bei denen die Definition der Formen Γ_ϱ, insbesondere die Eigenschaft gewisser Formen $K_0, K_1, \dots K_{m-1}$ eine Minimalbasis zu bilden, unverändert bleibt.

Letztere ruhte ja darauf, dass man jedes Γ durch die K in der Gestalt darstellen konnte:

$$\Gamma_\varrho = \gamma_0(z_1 z_2) \cdot K_0 + \gamma_1(z_1 z_2) \cdot K_1 + \dots \gamma_{m-1}(z_1 z_2) K_{m-1},$$

und wir werden bei ihr die $z_1 z_2$ nur so abändern dürfen, dass nicht nur jedes Γ ein Γ bleibt, sondern auch jedes γ ein γ. Da ist die Gruppe von Aenderungen, über die wir werden verfügen dürfen, die lineare:

$$z_1' = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2,$$
$$z_2' = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2.$$

Wenn wir dagegen auf das Weitergelten der zunächst gewählten Minimalbasis kein Gewicht legen, sondern nur verlangen, dass jede Form Γ_ϱ der Fläche eine ebensolche Γ_ϱ bleiben soll, so verfügen wir, zum mindesten eventuell, über eine etwas grössere Gruppe. Diese grössere Gruppe tritt ein, sobald neben $z_1 z_2$ noch weitere line-

are Formen auf der Fläche existiren. Mögen dieselben mit $z_3, z_4, \dots z_n$ bezeichnet sein. Die Definition der Γ_ϱ auf der Fläche (will sagen der „Normalgruppen" ϱ^{ten} Grades, in denen dieselben verschwinden) wird sich dann nicht ändern, wenn wir $z_1 z_2$ durch irgend zwei Linearformen:

$$z_1' = \alpha_1 z_2 + \dots\dots \alpha_n z_n$$
$$z_2' = \beta_1 z_1 + \dots\dots \beta_n z_n$$

ersetzen. –

Ich will nun dreierlei Anwendungen der bisher entwickelten Theorie besprechen, die ich so ordne, daß ich diejenige voranstelle, welche bei der kleinsten Gruppe von Umänderungen invariant ist.

Es sind dies

A.) Anwendung auf die Theorie der Minimalflächen,

B.) Anwendung auf die Theorie der algebraischen Gleichungen,

C.) Anwendung auf die Theorie der algebraischen Curven (in beliebig ausgedehnten Räumen)

Hierzu habe ich zunächst folgende Bemerkungen zu machen:

ad A). Von der Beziehung zur Theorie der Minimalflächen haben wir schon oben beiläufig gesprochen. Der Grundgedanke dabei ist, die Minimalfläche durch „parallele Normalen" auf eine

Kugel zu beziehen, und auf dieser die complexe Variable z zu interpretiren. Die Theorie bleibt ungeändert (die einzelne Minimalfläche bleibt mit sich selbst congruent), wenn man die Kugel beliebig um ihren Mittelpunkt dreht. Die zugehörige Gruppe der Aenderungen ist also hier, nach bekannten Entwickelungen, durch die Formel gegeben:

$$z' = \frac{(d+ia)z+(b+ic)}{(-b+ic)z+(d-ia)},$$

in welcher die a, b, c, d reelle Constante bedeuten.

ad B) Die Theorie der algebraischen Gleichungen kommt hier insofern in Betracht, als wir in der Gleichung

$$f(s,z) = 0$$

z als eine „bekannte" Grösse, s als eine „unbekannte" auffassen können und nun verlangen können, diese Unbekannte s zu bestimmen.

Wie verbindet sich der Apparat, der in der Theorie der algebraischen Gleichungen entwickelt wird: die Lehre von der Tschirnhaustransformation, von der Resolventenbildung etc. mit der Betrachtung der über der z-Ebene ausgebreiteten, zu $f(s,z)=0$ zugehörigen, algebraischen Gleichung? Die Beziehungen, welche sich dabei ergeben, werden durchweg

gegenüber der allgemeinen linearen Gruppe:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

invariant sein.

Ad. 8.). Wieder setzen wir voraus, es mögen auf der Fläche nebeneinander die linearen Formen z_1, z_2, ... z_n bestehen. Die mehrblättrige Fläche über der z-Ebene kommt hervor, indem wir $z_1 : z_2$ geometrisch interpretiren. Wir können nach der in der analytischen Geometrie üblichen Redeweise, die zwischen reell und imaginär nicht ausdrücklich unterscheidet, vielmehr die von den reellen Vorkommnissen herstammende Terminologie schlechtweg für alle Vorkommnisse gebraucht, auch so sagen: daß die geometrische Interpretation von $z_1 : z_2$ auf der z-Axe geschieht und dabei das algebraische Gebilde in eine mehrfache Ueberdeckung dieser Axe verwandelt wird. Unser neuer Ansatz ist jetzt, daß wir nicht gerade $z_1 : z_2$ als homogene Coordinaten auf einer Axe, sondern $z_1 : z_2 : z_3$ als homogene Coordinaten in der Ebene, $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ als homogene Coordinaten im Raume von 3 Dimensionen, etc. etc. interpretiren. Es erscheint dann unser algebraisches Gebilde (im Sinne

der bezeichneten Redeweise) als Curve der Ebene, oder als Curve des R_3, R_4, ... R_{n-1}. Diese Curve werden wir selbstverständlich im Sinne der projectiven Geometrie des sie tragenden Raumes untersuchen wollen. Das kommt darauf hinaus, daß wir als zugehörige Gruppe jenachdem die Gesammtheit der linearen Substitutionen von z_1, z_2, oder von z_1, z_2, z_3 resp. z_1, z_2, z_3, z_4 etc. etc. zu betrachten haben werden.

Sa. 16. I. 92. A. Näheres über Minimalflächen.

Wir beginnen mit gewissen Erläuterungen über Differentiiren und Integriren mit homogenen Variabelen. Einfache Differentiation, bez. Integration ist uns bereits immerzu in der Form entgegengetreten

$$f_0(z_1, z_2) = \int \Phi_{-2}(z_1, z_2)\,[z\,dz],$$

wo das Integral f_0 eine Form nullter Dimension, der Integrand Φ_{-2} eine Form $(-2)^{ter}$ Dimension ist.

Der tiefere Grund dieser Formel liegt darin, daß man neben dem selbstverständlichen: $df = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2$ vermöge des Euler'schen Theorems die andere Formel hat: $z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0$, vermöge deren wir $\frac{\partial f}{\partial z_1} = -z_2 \Phi$, $\frac{\partial f}{\partial z_2} = z_1 \Phi$ setzen dürfen. Hieraufhin ergeben sich dann folgende Formeln für zweifache

Differentiation, bez. Integration. Wir nehmen eine Form 1ten Grades als Ausgangspunkt:

$$f_1(z_1, z_2)$$

und beachten, daß ihre beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_2}$$

homogen nullter Dimension sind. Letzteres giebt uns vermöge des Euler'schen Theorems:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2} = -z_2^2 \Phi_{-3}, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1 \partial z_2} = z_1 z_2 \Phi_{-3}, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_2^2} = -z_1^2 \Phi_{-3}$$

und also

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \int z_2 \Phi_{-3}(z_1 z_2)(z\,dz), \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = \int -z_1 \Phi_{-3}(z_1 z_2)(z\,dz),$$

d.h.

$$f_1 = z_1 \int z_2 \Phi_{-3}(z_1, z_2) \cdot (z\,dz) - z_2 \int z_1 \Phi_{-3}(z_1, z_2) \cdot (z\,dz),$$

sodaß also hier f_1 und die Form (-3)ten Grades Φ_{-3} in bestimmten Zusammenhang gesetzt sind. —

Analog wird dann bei dreifacher Differentiation f_{+2} mit Φ_{-4} in Beziehung treten. Ich unterdrücke hier die Zwischenformeln und gebe nur das Resultat.

Wir haben einerseits:

$$\frac{\partial^3 f_2}{\partial z_1^3} = -z_2^3 \Phi_{-4}, \quad \frac{\partial^3 f_2}{\partial z_1^2 \partial z_2} = +z_2^2 z_1 \Phi_{-4}, \quad \frac{\partial^3 f_2}{\partial z_1 \partial z_2^2} = -z_2 z_1^2 \Phi_{-4}, \quad \frac{\partial^3 f_2}{\partial z_2^3} = +z_1^3 \Phi_{-4}$$

andererseits:

$$2 f_2 = z_1^2 \int +z_2^2 \Phi_{-4}(z\,dz) + 2 z_1 z_2 \cdot \int -z_1 z_2 \Phi_{-4}(z\,dz) + z_2^2 \cdot \int +z_1^2 \Phi_{-4}(z\,dz).$$

Die hiermit festgelegten Zusammenhänge zwischen f_1 und Φ_{-3}, resp. zwischen f_2 und Φ_{-4} werden bei Nichtgebrauch homogener Variabler, d. h. wenn man z_2 einfach $= 1$, $dz_2 = 0$ setzt, die gewöhnliche Ausdrucksweise finden:

$$\Phi_{-3} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}, \text{ d. h. } f_1 = -\iint \Phi_{-3} \cdot dz_1 ,$$
$$\Phi_{-4} = -\frac{\partial^3 f_2}{\partial z_1^3}, \text{ d. h. } f_2 = -\iiint \Phi_{-4} \cdot dz_1 ;$$

die f entstehen also für die gewöhnliche Ausdrucksweise aus den Φ durch mehrfache Integration.

Die homogenen Formeln, in denen die mehrfachen Integralzeichen nicht hintereinander, sondern nebeneinander geschrieben erscheinen, ergeben sich von hieraus natürlich durch partielle Integration.

Für unseren functionentheoretischen Ansatz aber ergiebt sich aus diesen Formeln eine bestimmte Verallgemeinerung. Wir haben bisher auf unseren Riemann'schen Flächen neben den algebraischen Formen diejenigen transcendenten Formen nullten Grades studirt, die sich aus den algebraischen Formen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension durch einfache Integration ergeben:

$$f_0 = \int \Phi_{-2}\,(z\,dz),$$

d. h. eben die „Integrale" der Riemann'schen

Fläche.

Jetzt werden wir daneben *transcendente Formen ersten, bez. zweiten Grades*, f_1 und f_2 studiren, welche sich aus den Φ_{-3} resp. Φ_{-2} vermöge zweier bez. dreier Integralzeichen ergeben. Machen wir auf der Riemann'schen Fläche einen Umgang, so wächst f_0 um einen constanten Periodicitätsmodul C_0, d.h. um eine rationale ganze Form nullten Grades, f_1 aber und f_2 wachsen offenbar um Ausdrücke $C_1 z_1 + C_2 z_2$, bez. $C_1 z_1^2 + 2 C_2 z_1 z_2 + C_3 z_2^2$, d.h. um *rationale ganze Formen ersten, bez. zweiten Grades*.

Hierin liegt dann die Eigentümlichkeit der neuen Transcendenten, die man nun ebenso ausführlich wird untersuchen dürfen, wie dies bisher ausschliesslich mit den f_0 geschah. —

In dem so erweiterten Gebiete bewegen sich nun die Formeln für die Minimalflächen, die wir jetzt kennen lernen müssen. Es sind dies von der homogenen Gestalt abgesehen keine anderen als die Formeln, welche Weierstrass in den Berliner Monatsberichten von 1866 aufgestellt hat. In der geometrischen Interpretation dieser Formeln folgen wir Lie.

Wir beginnen daher mit solchen Formeln,

welche im Raume der rechtwinkeligen Coordinaten ξ, η, ζ eine „Minimalcurve" darstellen, d.h. eine Curve

$$\xi = \varphi(\sigma),\ \eta = \psi(\sigma),\ \zeta = \chi(\sigma),$$

deren Tangente unausgesetzt den Kugelkreis schneidet, sodass also

$$\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2 = 0 \text{ ist.}$$

Wir erhalten eine derartige Minimalcurve einfach, indem wir schreiben:

$$(1)\quad \xi + i\eta = \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2};\ \xi - i\eta = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_2^2};\ \zeta = \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1 \partial z_2}$$

unter f_2 eine beliebige Form zweiten Grades von $z_1 z_2$ verstanden. Wir haben nämlich daraufhin sofort auf Grund der eben mitgeteilten Formeln: $d(\xi + i\eta) = \frac{\partial^3 f_2}{\partial z_1^3} dz_1 + \frac{\partial^3 f_2}{\partial z_1^2 \partial z_2} dz_2 = z_2^2 \cdot \Phi_{-4} \cdot (z\,dz)$,

$$d(\xi - i\eta) = -z_1^2 \cdot \Phi_{-4} \cdot (z\,dz),\ d\zeta = -z_1 z_2 \cdot \Phi_{-4} \cdot (z\,dz);$$

daraus folgt:

$$d(\xi + i\eta) \cdot d(\xi - i\eta) + d\zeta^2 = 0,$$

d.h.

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = 0$$

Zugleich dürfen wir die Formeln (1) in die Gestalt setzen:

$$(2)\quad (\xi + i\eta) = \int z_2^2 \Phi_{-4} \cdot (z\,dz),\ (\xi - i\eta) = -\int z_1^2 \cdot \Phi(z\,dz),\ \zeta = -\int z_1 z_2 \Phi_{-4} (z\,d$$

Daß die so erhaltenen Formeln aber auch in der Lage sind, jede Minimalcurve darzustellen, sieht man, wenn man die ganze Entwickelung umdreht. In der Tat haben wir bei jeder Minimalcurve

$$d(\xi+i\eta)\cdot d(\xi-i\eta)+d\zeta^2=0,$$

sodaß wir setzen dürfen:

$d(\xi+i\eta)=z_2^2\cdot\Phi_{-4}$, $d(\xi-i\eta)=-z_1^2\,\Phi_{-4}$, $d\zeta=-z_1 z_2\cdot\Phi_{-4}$,

wo der Parameter $\frac{z_1}{z_2}$ durch die Doppelformel definirt ist:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{d(\xi-i\eta)}{d\zeta}=-\frac{d\zeta}{d(\xi+i\eta)}$$

Hieran knüpft die geometrische Interpretation dieser z, sobald wir $d\xi:d\eta:d\zeta$ (durch welche zunächst die Richtung der Tangente der Minimalcurve festgelegt wird) als homogene Coordinate des Punktes der ∞ fernen Ebene gelten lassen, in welchem diese Tangente einschneidet. Die Gleichung:

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=0$$

ist dann einfach die Gleichung des Kugelkreises und $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ *wird der Parameter, durch welchen man in der Kegelschnittstheorie üblichen Weise den einzelnen Punkt der Kegelschnittes festlegt.*

Wieder knüpfen wir hieran eine functionentheoretische Bemerkung. Jenachdem wir f_2 oder Φ_4 auf einer vorgelegten Riemann'schen Fläche algebraisch nehmen, wird uns die Formelgruppe (1) eine der Fläche zugeordnete, algebraische Minimalcurve, oder aber die Formelgruppe (2) eine der Fläche zugeordnete, transcendente Minimalcurve definiren. Letztere hat dabei die Eigenschaft, allemal, wenn z_1/z_2 über die R. Fläche hin einen geschlossenen Periodenweg beschreibt, eine Verschiebung (Parallel-Verschiebung) zu erleiden; es ist eine periodische Minimalcurve.

Wir müssen jetzt lernen, wie man von den Minimalcurven zu den Minimalflächen schreitet. Dies geschieht durch die Formeln von Monge, (die übrigens Lie erst in der hier in Betracht kommenden Weise interpretirt hat.) Man nimmt einfach zwei Minimalcurven:

$$\xi_1 = \varphi_1(s_1),\ \eta_1 = \psi_1(s_1),\ \zeta_1 = \chi_1(s_1)$$
$$\xi_2 = \varphi_2(s_2),\ \eta_2 = \psi_2(s_2),\ \zeta_2 = \chi_2(s_2)$$

und bildet aus ihnen die „Translationsfläche"

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \varphi_1(s_1) + \varphi_2(s_2),$$
3) $$\eta = \eta_1 + \eta_2,\ \zeta = \zeta_1 + \zeta_2.$$

In der Tat ist sofort zu sehen, daß diese Translationsfläche eine Minimalfläche ist. Denn sie ist von unendlich vielen Curven

$$\xi = \varphi_1(t_1) + c_1;\quad \eta = \psi_1(t_1) + c_2;\quad \zeta = \chi_1(t_1) + c_3$$

bedeckt, die sich aus der ersten Minimalcurve durch Parallelverschiebung ergeben (Characteristiken erster Art der Fläche), und andererseits von unendlich vielen Curven (Characteristiken zweiter Art), welche sich aus der zweiten Minimalcurve durch Parallelverschiebung ergeben.

Da ist es ein bekannter Satz der Flächentheorie, daß die Haupttangenten der Fläche in einem beliebigen ihrer Punkte harmonisch zu den beiden Characteristiken liegen, die durch den Flächenpunkt hindurchgehen. Aber diese beiden Characteristiken sind hier Minimalcurven, und also stehen die beiden Haupttangenten aufeinander *senkrecht*.

Eben das ist aber bekanntlich das geometrische Kennzeichen der Minimalflächen. —

Bei dieser Erläuterung haben wir geometrisch ganz allgemein operirt, d.h. wir haben die geometrische Ausdrucksweise der Reellen angewandt unbekümmert darum, daß die vorkommenden Größen

$t_1, t_2, \xi, \eta, \mathfrak{z}$ beliebig complex sein mögen. Wir specificiren nun aber so, daß wir eine Minimalfläche mit ∞^2 reellen Punkten (also eine Fläche im elementaren Sinne des Wortes) erhalten, wobei wir dann ausschließlich auf diese reellen Punkte achten wollen. Wir erreichen dies, indem wir in Formel 3) φ_1 und φ_2, ψ_1 und ψ_2, χ_1 und χ_2, endlich t_1 und t_2 beziehungsweise conjugirt imaginär wählen. So kommt man dann zur Darstellung der reellen Punkte einer reellen Minimalfläche, (indem wir das Conjugirtsein in üblicher Weise durch einen horizontalen Strich andeuten):

(4) $\xi = \varphi(t) + \bar{\varphi}(\bar{t}),\ \eta = \psi(t) + \bar{\psi}(\bar{t}),\ \mathfrak{z} = \chi(t) + \bar{\chi}(\bar{t})$,

(wobei natürlich $\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi_2'^2 = 0$)

Di. 20. I. 92. Wir haben diese Formeln jetzt nur mit den oben gegebenen (1) und (2) zu verbinden, um Weierstraß' Darstellung der reellen Minimalflächen zu haben.

Wir bekommen einerseits:

$$(5)\quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{R}\left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2} - \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z_2^2}\right), \\ \eta = \mathfrak{R}\left(-i\left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2} + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z_2^2}\right)\right), \\ \mathfrak{z} = 2\,\mathfrak{R}\left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z_1 \partial z_2}\right), \end{cases}$$

andererseits:

$$(6)\quad \begin{cases} \xi = \Re\left(\int (z_2^2 - z_1^2)\, \Phi_{-4} \cdot (z\,dz)\right), \\ \eta = \Re\left(-i\int (z_2^2 + z_1^2)\, \Phi_{-4}\, (z\,dz)\right), \\ \zeta = \Re\left(-2\int z_1 z_2\, \Phi_{-4}\, (z\,dz)\right), \end{cases}$$

(unter $\Re$ allemal den reellen Teil des nebengeschriebenen Arguments verstanden). Wählen wir hier f_2 bez. Φ_{-4} als eine zu einer bestimmten Riemann'schen Fläche gehörige algebraische Form, so haben wir in (5) eine zur Fläche gehörige "algebraische", in (6) eine ebensolche periodische Minimalfläche.

Denkt man die complexe Variable z in üblicher Weise auf einer Kugelfläche, so ergiebt sich für die vorstehenden Formeln eine besonders einfache Deutung. Man kann das z eines reellen Kugelpunktes als den Parameter der geradlinigen Erzeugenden erster Art ansehen, welche auf der Kugel durch den betr. Punkt hindurchläuft; der conjugirte Wert $\bar{z}$ wird dann als Parameter für die durch den Kugelpunkt laufende Erzeugende zweiter Art betrachtet werden dürfen. Aber beide Erzeugende sind Minimalgerade, d. h. treffen den Kugelkreis, sodass z und $\bar{z}$ auch als die Parameter zweier Punkte des Kugelkreises angesehen werden können, derjenigen beiden, in denen der Kugelkreis von der Tangentialebene des Kugelpunktes getroffen wird.

Andererseits ist aber klar, dass der Kugelkreis von der Tangentialebene, die im Punkte $z, \bar{z}$ der Minimalfläche an die Minimalfläche construirt werden kann, gerade auch in den Punkten $z, \bar{z}$ getroffen wird. Denn die Tangentialebene an die Minimalfläche enthält als Minimalgerade eben die beiden Tangenten der durch den Flächenpunkt laufenden Minimalcurven. Daher:

Die Tangentialebenen, welche man an Kugel und Minimalfläche in entsprechenden Punkten construiren kann, sind parallel,

oder auch:

Die zwischen Kugel und Minimalfläche bestehende Abbildung wird durch parallele Normalen vermittelt. Da erkennt man denn sofort, was das für eine mehrblättrige Fläche über der Kugel ist, welche einer gegebenen algebraischen Minimalfläche z. B. entspricht. Man übertrage alle Punkte der Minimalfläche auf entsprechende Kugelpunkte nach dem Gesetz der parallelen Normalen: dann wird die Kugel von den Bildpunkten von selbst (allgemein zu reden) mehrfach überdeckt und der Inbegriff dieser Bildpunkte, das ist die Riemann'sche Fläche über der Kugel, um welche es sich handelt.

Zugleich ist ersichtlich, daß Minimalfläche und Kugel <u>conform</u> aufeinander bezogen sind. Denn die Fortschreitungsrichtungen, welche von einem Punkte der Minimalfläche auf der Minimalfläche auslaufen, sind den Fortschreitungsrichtungen, die vom Kugelpunkte auf der Kugel ausgehen, derartig (eindeutig) zugeordnet, daß den Minimalrichtungen hier die Minimalrichtungen dort entsprechen, und darin ruht gerade das Wesen der conformen Abbildung. Wir haben also in den Formeln (5) eine Methode, um irgend eine die Kugel überdeckende Riemann'sche Fläche conform auf eine den Raum durchziehende Minimalfläche zu übertragen, womit wir ein Versprechen eingelöst haben, das wir früher (zu Anfang der Vorlesung) eingegangen sind.

Es ist leider nicht möglich, länger hier bei den außerordentlich interessanten Fragen zu verweilen, die sich da aufdrängen. Für unsere heutige Kenntnis des Gegenstandes giebt es eine zusammenfassende Darstellung in <u>Bd. I</u> von Darboux's Théorie générale des surfaces. Aber es scheint nützlich, diese Theorie unter functionentheoretischen Gesichtspunkten weiter zu verfolgen,

so beispielsweise, daß man die Gesammtheit der Minimalflächen noch genauer untersucht, welche den sämmtlichen auf irgend welcher über der Kugel ausgebreiteten Riemann'schen Fläche existirenden f_2 und Φ_{-4} entsprechen.

B. Excurs über die Theorie der algebraischen Gleichungen.

Die Gleichungstheorie kommt hier insofern in Betracht, als man jede Gleichung:

$$f(s^m, z) = 0,$$

die uns bisher eine m-blättrige Fläche über der z-Ebene definirte, auch so ansehen kann, daß man s als die „Unbekannte", z als einen „Parameter" betrachtet und fragt, wie man s als Function von z berechnet. Da wird es dann interessant, zu verfolgen, wie die Theorie der algebraischen Gleichungen mit der Theorie der Riemann'schen Fläche in Wechselwirkung tritt.

Als Rationalitätsbereich der algebraischen Gleichung wählen wir daher zweckmäßigerweise die Gesammtheit der rationalen Functionen von z (unbekümmert um die Natur der numerischen Coefficienten, welche in diesen Functionen auftreten mögen).

Wir erkennen dann sofort, daß unsere Gleichung (in dem so festgelegten Rationalitätsbereiche) irreducibel oder reducibel ist, je nachdem die zugehörige Riemann'sche Fläche aus einem Stücke besteht oder zerfällt. Aber mehr, die Galois'sche Gruppe der Gleichung erscheint als die Monodromiegruppe der Riemann'schen Fläche d. h. als der Inbegriff derjenigen Vertauschungen der Wurzeln $s' \dots s^{m}$, der herauskommt, wenn z in seiner Ebene beliebige geschlossene Wege beschreibt.

Besonders interessant scheint es, hier diejenigen beiden Verfahrungsweisen in Betracht zu ziehen, die man bei der Auflösung der Gleichung $f(\overset{m}{s}, z) = 0$ zu benutzen pflegt: die Tschirnhaustransformation und die Resolventenbildung.

a). Die Tschirnhaustransformation besteht bekanntlich darin, daß man statt s in unserer Gleichung irgend eine rationale Function:

$$t = R(s, z)$$

als neue Unbekannte einführt, wobei man indeß nur solche t benutzen wird, deren Discriminante bezüglich z nicht identisch verschwindet, weil sonst die Substitution nicht eindeutig umkehrbar wäre. Augenscheinlich kommt

dieser Ansatz einfach darauf hinaus, die Riemann'sche Fläche über der z-Ebene ganz ungeändert zu lassen und statt s irgend eine andere zu der Fläche gehörige, algebraische Function als neue Unbekannte einzuführen. (vergl. p. 102.)

So werden wir dann alle die Sätze benutzen können, welche wir über die auf der Fläche existirenden, algebraischen Functionen bislang abgeleitet haben. Beispielsweise werden wir (um nur dies eine zu erwähnen) dann und nur dann, wenn das Geschlecht der Fläche gleich Null ist, t so einführen können, daß es jeden Werth nur in einem Flächenpunkte annimmt, - worauf dann unsere Gleichung die Gestalt erhält:

$$R(t) = z.$$

b) Bei der Resolventenbildung handelt es sich bekanntlich darum, eine Function die irgendwie rational von sämmtlichen Wurzeln $s_1 \dots s_m$ und von z abhängt:

$$\Phi = R(s_1, s_2, \dots \dots s_m, z)$$

als Unbekannte einzuführen. Ein solches Φ wird bei einer bestimmten Untergruppe der Galois'schen Gruppe ungeändert bleiben. Insofern wir zwei Resolventen, welche ihrerseits durch

Tschirnhaustransformation auseinander hervorgehen, als gleichwertig ansehen, werden uns solche Φ gleichwertige Resolventen ergeben, welche entweder direct zu derselben Untergruppe der Galois'schen Gruppe, oder doch zu gleichberechtigten Untergruppen gehören. Man denke sich nun in diesem Sinne zu $f(s,z)=0$ alle möglichen Arten zugehöriger Resolventen, insbesondere die Galois'sche Resolvente aufgestellt. *Jede Art wird uns dann über der z-Ebene eine neue Riemann'sche definiren, welche aus der zu $f(s,z)=0$ gehörigen Fläche in bestimmter, gesetzmäßiger Weise abgeleitet ist.* So kommen wir also dazu, unsere functionentheoretischen Betrachtungen in der Richtung weiter auszubilden, daß wir zu der vorgelegten über der z-Ebene ausgebreiteten Fläche eine Anzahl neuer Flächen associiren!

Sa. 23.1.92

Betrachten wir insbesondere diejenige Fläche über der z-Ebene, welche der *Galois*'schen Resolvente von $f(s,z)=0$ entspricht. Durch welche geometrische Eigenschaften wird dieselbe ausgezeichnet sein? Sei N die Anzahl der Vertauschungen der Galois'schen Gruppe. Dann hat

die Galois'sche Resolvente natürlich N Wurzeln:

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots\dots \Phi_N$$

und wir erhalten eine N-blättrige Fläche. Aber das Charakteristische der Galois'schen Resolvente ist dabei, daß

$$\Phi_i = \theta(\Phi, z),$$

d. h. daß jede Wurzel Φ_i eine rationale Funktion jeder anderen Φ ist. Wir schliessen, daß jedes Blatt unserer neuen Riemann'schen Fläche genau so verläuft, bez. mit den anderen zusammenhängt, wie jedes andere, kurz gesagt, daß unsere Fläche über der z-Ebene regulär ausgebreitet ist. Es schließt dies ein, daß die Verzweigung der Fläche eine reguläre ist, sodaß, wenn für einen Wert von z irgend ν Blätter im Cyclus zusammenhängen, für denselben Wert von z je ν Blätter im Cyclus zusammenhängen.

Aber die hiermit bezeichnete Regularität der Verzweigung würde allein noch nicht genügen: es müssen vermöge dieser Verzweigung solche Zusammenhänge zwischen den Blättern der Fläche hergestellt sein, daß auch bei Umgängen in der z-Ebene, welche mehrere Verzweigungspunkte umspannen, für alle Blätter je dieselbe Zahl sich cyclisch vertauschender Blätter resultirt.

Es giebt eine einfache Methode, um sich von der Bauart einer derartigen regulären Fläche – wie überhaupt von dem Aufbau mehrblättriger Flächen über der z-Ebene – geometrisch Rechenschaft zu geben. Ich ziehe zunächst in der z-Ebene eine sich selbst nicht schneidende, geschlossene Curve, welche durch alle Stellen z hindurchläuft, über denen Verzweigungspunkte der Fläche gelegen sind. Diese Curve übertrage ich dann auf alle Blätter der Riemann'schen Fläche, wodurch jedes Blatt in zwei Halbblätter zerlegt erscheint, von denen ich mir der bequemen Auffassung halber das eine schraffirt, das andere nicht schraffirt denke.

Nunmehr verwandele ich unsere Fläche – unter Beibehaltung der Schraffirung durch irgendwelchen Prozeß also z. B. durch Formeln der Minimalflächentheorie, die wir neulich kennen lernten, – in eine nur einfach überdeckte irgendwie den Raum durchziehende, geschlossene Fläche. Auf dieser Fläche wird man den aufeinanderfolgenden Halbblättern der ursprünglichen Riemann'schen Fläche entsprechend, <u>ein Nebeneinander abwechselnd schraffirter und nicht schraffirter Gebiete</u>, oder, wie wir kurz sagen, eine <u>Gebietseinteilung</u> haben, und diese

die Galois'sche Resolvente natürlich N Wurzeln:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots\ldots \Phi_N$$

und wir erhalten eine N-blättrige Fläche. Aber das Charakteristische der Galois'schen Resolvente ist dabei, dass

$$\Phi_i = \theta(\Phi, z),$$

d. h. dass jede Wurzel Φ_i eine rationale Funktion jeder anderen Φ ist. Wir schliessen, dass jedes Blatt unserer neuen Riemann'schen Fläche genau so verläuft, bez. mit den anderen zusammenhängt, wie jedes andere, kurz gesagt, dass unsere Fläche über der z-Ebene regulär ausgebreitet ist. Es schliesst dies ein, dass die Verzweigung der Fläche eine reguläre ist, sodass, wenn für einen Wert von z irgend ν Blätter im Cyclus zusammenhängen, für denselben Wert von z je ν Blätter im Cyclus zusammenhängen.

Aber die hiermit bezeichnete Regularität der Verzweigung würde allein noch nicht genügen: es müssen vermöge dieser Verzweigung solche Zusammenhänge zwischen den Blättern der Fläche hergestellt sein, dass auch bei Umgängen in der z-Ebene, welche mehrere Verzweigungspunkte umspannen, für alle Blätter je dieselbe Zahl sich cyclisch vertauschender Blätter resultirt.

Es giebt eine einfache Methode, um sich von der Bauart einer derartigen regulären Fläche – wie überhaupt von dem Aufbau mehrblättriger Flächen über der z-Ebene – geometrisch Rechenschaft zu geben. Ich ziehe zunächst in der z-Ebene eine sich selbst nicht schneidende, geschlossene Curve, welche durch alle Stellen z hindurchläuft, über denen Verzweigungspunkte der Fläche gelegen sind. Diese Curve übertrage ich dann auf alle Blätter der Riemann'schen Fläche, wodurch jedes Blatt in zwei Halbblätter zerlegt erscheint, von denen ich mir der bequemen Auffassung halber das eine schraffirt, das andere nicht schraffirt denke.

Nunmehr verwandele ich unsere Fläche – unter Beibehaltung der Schraffirung durch irgendwelchen Prozeß, also z. B. durch Formeln der Minimalflächentheorie, die wir neulich kennen lernten, – in eine nur einfach überdeckte irgendwie den Raum durchziehende, geschlossene Fläche. Auf dieser Fläche wird man den aufeinanderfolgenden Halbblättern der ursprünglichen Riemann'schen Fläche entsprechend, *ein Nebeneinander abwechselnd schraffirter und nicht schraffirter Gebiete*, oder, wie wir kurz sagen, eine *Gebietseinteilung* haben, und diese

Gebietseinteilung ist es, die uns nun in übersichtlicher Weise den Zusammenhang der früheren Halbblätter wiederspiegelt. Insbesondere, wenn eine reguläre Fläche von N Blättern aufzufassen ist, so werden wir eine reguläre Einteilung unserer im Raume gelegenen Fläche in $2N$ abwechselnd schraffirte und nicht schraffirte Bereiche zu treffen haben, eine Aufgabe, die ohne Weiteres geometrisch verständlich ist.

Die geschilderte Maassnahme lässt sich, wie wir doch noch hervorheben müssen, besonders einfach durchführen, wenn die vorgelegte, algebraische Gleichung die Gestalt $R(s) = z$ hat, sodass jedem Werte s nur ein Punkt der in Betracht kommenden Riemann'schen Fläche entspricht. Als die den Raum durchziehende, einfach überdeckte Fläche kann dann die s-Ebene (oder s-Kugel) selbst genommen werden. So ist es, um das allereinfachste Beispiel zu nennen, bei der reinen Gleichung $s^N = z$, so ist es überhaupt bei den Gleichungen der „regulären Körper". Man nehme etwa, um nur dieses zu nennen, die Ikosaedergleichung. Da hat man zunächst über der z-Ebene eine 60-blättrige Fläche, deren Blätter bei $z=0$ zu je 3, bei $z=1$ zu je zwei, bei $z=\infty$ zu je fünf im Cyclus zusammenhängen. Als einfachsten

Absonderungsschnitt wird man hier in der z-Ebene die Axe der reellen Zahlen nehmen, also die z-Ebene in eine positive und eine negative Halbebene zerlegen, von denen wir etwa die erstere schraffiren.

Nun machen wir die Uebertragung auf die s-Kugel. Da bekommen wir der Dreizahl der Verzweigungsstellen entsprechend eine Einteilung in lauter Dreiecke: 60 schraffirte und 60 nicht schraffirte Dreiecke, von denen bald 2.3, bald 2.2, bald 2.5 in einem Kugelpunkte zusammenstossen. Alles regulär geordnet, wie es die bekannte Ikosaëderfigur aufweist. Ich darf zufügen, dass diese geometrischen Maassnahmen, wie überhaupt die Ueberlegungen über die Zusammengehörigkeit Galois'scher Sätze und Riemann'scher Constructionen zum ersten Male im 14ten Annalenbande 1878 entwickelt worden sind; in ausführlicherer Gestalt findet man dann diese Dinge in Band I der Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen. Besonders zu nennen ist hier ferner die Dissertation von Dyck (München 1879), die in neugearbeiteter Form in Bd. 17 der Annalen erschien (1880), (vergl. dazu die Bemerkung in Bd. 20 der Annalen, p 30) Dyck sucht alle Möglichkeiten, eine geschlossene Fläche vom

Geschlechte $p = 0$ oder $1, 2, 3$ regulär einzuteilen. Die hiermit bezeichneten Fragestellung entspricht, daß wir nicht nur über der z-Ebene, sondern über irgendwelcher geschlossenen Fläche, die wir als Substrat nehmen dürfen, regulär verlaufende Flächen in Betracht ziehen. Die hierin liegende Verallgemeinerung können wir natürlich auf die Theorie der algebraischen Gleichungen übertragen. Wir dürfen dann nur nicht mit Gleichungen $f(s, z) = 0$ beginnen, d. h. mit Gleichungen, welche neben der Unbekannten s den Parameter z ausschließlich rational enthalten, sondern wir müssen allgemeiner schreiben $f(s, \sigma, z) = 0$, wo σ und z, die beide in f rational auftreten, ihrerseits durch eine algebraische Gleichung $\varphi(\sigma, z) = 0$ verbunden sein sollen. Uebrigens sind die Flächen, welche über einer vorgegebenen Riemann'schen Fläche (σ, z) irgendwie regulär ausgebreitet sind, keine anderen als diejenigen, welche man sonst wohl als Flächen mit einer Gruppe eindeutiger Transformationen in sich selbst bezeichnet.

Als solche sollen sie zu Anfang des Sommersemesters noch ausführlich betrachtet werden.

Noch sei bemerkt, daß mit den hier bespro-

chenen Untersuchungen neuere Publicationen von Kronecker und seinen Schülern, Netto, Hensel, Runge in enger Beziehung stehen. Der Unterschied ist nur, dass die genannten Herren zunächst nicht den Blätterzusammenhang der Riemann'schen Fläche im allgemeinen Sinne des Wortes in Betracht ziehen, sondern nur die Verzweigung (den Zusammenhang) um die einzelnen Verzweigungspunkte. Diese findet dann in der früher geschilderten Weise ihren Ausdruck in Angaben über die Discriminante sei es der vorgelegten Gleichung oder Gleichungen, sei es irgendwelcher aufzustellenden Resolvente. —

3) Beziehung der Riemann'schen Theorie zur Theorie der algebraischen Curven.

Sb. 30.1.92.

Früher haben wir bereits den Ansatz gegeben, der von der Riemann'schen Fläche zur Geometrie der algebraischen Curven hinüberleitet. Wir nehmen irgendeine algebraische Function der Fläche z in Betracht, die m-werthig sei, und durch welche die Fläche also auf die m-fach überdeckte z-Ebene oder was dasselbe besagen soll, auf die m-fach überdeckte z-Axe abgebildet wird. Jetzt spalten wir z in $\frac{z_1}{z_2}$. So kann es sein, dass neben den so gewonnenen z_1, z_2 noch andere linear unabhängige

Formen auf der Fläche vorhanden sind, sagen wir $z_3, z_4, \dots z_\nu$ (die hier auftretende Zahl ν bestimmt sich, wie wir früher sahen, aus dem Riemann'-Roch'schen Satze).

Statt dann nur $z_1 : z_2$ „geometrisch" zu interpretiren und damit das algebraische Gebilde auf den „R_1" zu beziehen, können wir, je nachdem wir wollen auch $z_1 : z_2 : z_3$ oder $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ etc. in Betracht nehmen und das Gebilde dadurch auf eine Curve des „R_2", des „R_3" etc. abbilden. Diese Curve wird von den Bildpunkten des Gebildes je nach der Auswahl der $z_1 : z_2 : z_3 \dots$ einfach oder mehrfach überdeckt sein. Indem wir als „Ordnung" derselben die Anzahl von Punkten bezeichnen, in denen unsere mit der richtigen Multiplicität gezählte Curve von einer beliebigen Geraden des R_2, resp. einer beliebigen Ebene des R_3 etc. geschnitten wird, werden wir sagen müssen, *daß unsere Curve allemal von der m^{ten} Ordnung sei.* Denn eine beliebig lineare Form $a_1 z_1 + a_2 z_2$, $a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3$, ... verschwindet auf der Riemann'schen Fläche doch in m-beweglichen Punkten.

So bekommen wir also *Curven m^{ter} Ordnung im $R_1, R_2, \dots R_{\nu-1}$* als ebensoviele „Erscheinungsformen" unseres algebraischen Gebildes, und haben nun zuzusehen, *wie die geometrischen Eigenschaften*

dieser Curven mit den uns bereits bekannten functionentheoretischen Eigenschaften der algebraischen Gebilde zusammenhängen. –

Beispiele:

a) Ich nehme $p = 0$ und x als eine einwertige Function auf der Fläche. Jetzt setze ich $z = x^m$. Spalten wir dann z in $\frac{z_1}{z_2}$, so dürfen wir schreiben $z_1 = x_1^m$, $z_2 = x_2^m$. Da sieht man, daß neben z_1, z_2 noch eine ganze Reihe linearer Formen existiren:

$$z_3 = x_1^{m-1} x_2,\; x_4 = x_1^{m-2} x_2^2, \ldots\; z_{m+1} = x_1 x_2^{m-1},$$

wählen wir jetzt

$$z_1 : z_2 : z_3 \ldots\ldots : z_{m+1} = x_1^m : x_2^m : \ldots\ldots$$

als homogene Coordinaten des R_m, so beziehen wir das Gebilde damit auf diejenige rationale Raumcurve, welche man die Normcurve der R_m zu nennen pflegt!

b). Ich denke mir über der x-Ebene, indem ich $\sqrt{f_{2p+2}(x_1, x_2)}$ gegeben ansehe irgendeine hyperelliptische Fläche vom Geschlechte p gegeben. Ich verfahre übrigens genau wie vorhin, nur daß ich m ausdrücklich kleiner als $(p+1)$ nehmen will damit bei der Bildung der linearen Formen

z_3, z_4 .. die Quadratwurzel $\sqrt{f_{2p+2}}$ nicht mit in Betracht zu ziehen ist. Indem ich dann $z_1 : z_2 : \dots$ wieder geometrisch interpretire, bekomme ich abermals die Normalcurve des R_m. Aber indem wir jetzt neben den rationalen Functionen der z die $\sqrt{f_{2p+2}}$ als bekannt ansehen, *haben wir uns diese Normcurve doppelt überdeckt vorzustellen.* *)

c). Setzen wir im vorigen Beispiele m insbesondere $= p-1$, so verhalten sich die $z_1 : z_2 : z_3 \dots$ wie die zum hyperelliptischen Gebilde gehörigen Formen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p$ der ersten Gattung.

Wir können also sagen: *daß die Curve der φ im hyperelliptischen Falle eine doppeltüberdeckte Normcurve des R_{p-1} vorstellt.*

Allgemein wird die Curve der φ eine Curve $(2p-2)$ter Ordnung des R_{p-1} sein, und es ist leicht aus dem Riemann-Roch'schen Satz abzuleiten, daß diese Curve immer, den hyperelliptischen Fall allein ausgenommen, nur einfach überdeckt ist.

---

*) Die beiden „Ueberdeckungen" hängen in den Punkten $f=0$ „zusammen", also in den Punkten, welche die Verzweigungspunkte der ursprünglichen, zweiblättrigen Fläche ausmachen.

Die so hervorkommende C_{2p-2} des R_{p-1} ist diejenige Normalcurve (Normalcurve der φ), an welcher wir weiterhin die Eigenschaften der algebraischen Gebilde von höherem p am liebsten studiren werden.

Es ist wohl kaum nötig, auszuführen, daß wir solcherweise von den Riemann'schen Flächen aus alle überhaupt existirenden, algebraischen Curven bekommen.

Dagegen möchte ich schon hier darauf aufmerksam machen, daß wir dabei von selbst zu gewissen Auffassungen betr. algebraische Curven kommen, welche der gewöhnlichen, geometrischen Betrachtung fern liegen oder doch erst in den letzten Jahren entwickelt worden sind.

Dahin gehört bereits die Idee, <u>mehrfach überdeckte</u> Curven als Objecte der geometrischen Betrachtung gelten zu lassen, was dann zur Folge hat, daß alle Aussagen, die man sonst über m-blättrige Flächen über der z-Ebene macht, jetzt auf die Curven m^{ter} Ordnung der R_1 bezogen werden können.

Dahin gehört ferner die Idee, die Curven der

R_1, R_2, ... $R_{\nu-1}$, welche durch Nebeneinanderstellung von $z_1, z_2, z_3, \ldots z_\nu$ beziehungsweise entstehen, als zusammengehörig zu betrachten. Wir werden die Curve der $R_{\nu-1}$, weil bei ihr das volle System der Linearformen $z_1 \ldots z_\nu$ benutzt wird, eine *Vollcurve* nennen, die Curven der niederen Räume aber *Teilcurven*. Die Teilcurven ergeben sich aus der Vollcurve, indem man gewisse z weglässt. Das heisst geometrisch: *Die Teilcurven der niederen Räume ergeben sich aus der Vollcurve des $R_{\nu-1}$, indem man letztere auf die niederen Räume projicirt.* Die Projection ist dabei eine solche, bei der sich die Ordnung der Curve nicht ändert, was wieder in geometrischer Weise ausgesprochen werden kann.

Dann aber folgende Bemerkung: Die Geometer untersuchen auf den Curven des R_2, R_3, ... auf das Ausführlichste die rationalen Formen der z: $F_\varrho(z_1, z_2, z_3 \ldots)$. Wie viele solcher Formen ϱ^{ten} Grades werden für die Curve identisch verschwinden, wieviele, auf der Curve unterschiedene F_ϱ also zu unterscheiden sein? Hierauf dann gründen sie ihre „Schnittpunktsätze" ihren Begriff der Residualität etc. etc. – Demgegenüber wird für uns gegeben sein, dass wir nicht die Gesamt-

heit der F_ϱ, sondern überhaupt alle zu der Curve gehörigen <u>algebraischen Formen</u> Γ_ϱ in Betracht ziehen (wobei die Definition der Γ_ϱ keine andere sein wird, als früher, bei der Einführung der Formentheorie, auf der m-blättrigen Fläche). Die Zahl dieser Γ_ϱ haben wir früher nach dem Riemann-Roch'schen Satz festgelegt, und an sie dann den Begriff der Residualität etc. und die Lehre von der Darstellung der Functionen angeknüpft.

Welches ist nun die Beziehung zwischen den Γ_ϱ und den F_ϱ? Da müssen wir auf den Satz über die <u>Minimalbasis</u> zurückgreifen, den wir für die mehrblättrige Fläche über der z-Ebene d.h. für die Curve der R, aufgestellt haben. Statt $F_\varrho(z_1, z_2)$ schrieben wir damals $\gamma_\varrho(z_1, z_2)$. Es gelang uns dann m solche algebraische Formen.

$$K_0, K_1, \ldots K_{m-1}$$

auszusuchen, dass sich jeder Γ_ϱ in der Gestalt darstellen liess:

$$\Gamma_\varrho = \gamma^{(0)}(z_1, z_2).K_0 + \gamma^{(1)}(z_1, z_2).K_1 + \cdots \gamma^{(m-1)}(z_1 z_2).K_{m-1}$$

Dabei war K_0 eine Constante, und unter den $K_1, K_2 \cdots$ traten jedenfalls alle die linearen Formen $z_3, z_4, \cdots z_\nu$ auf, die neben z_1, z_2 in Betracht kommen mögen. Wird es möglich sein, diesen

Satz auf die Curven der höheren Räume zu übertragen?

Wird es beispielsweise bei ebenen Curven m^{ter} Ordnung immer möglich sein, eine Anzahl zugehöriger, algebraischer Formen

$$\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots\ldots$$

so auszuwählen, daß sich jedes Γ in der Gestalt darstellt:

$$\Gamma_c = \gamma^0(z_1 z_2 z_3) \cdot \Lambda_0 + \gamma^1(z_1 z_2 z_3) \cdot \Lambda_1 + \ldots\ldots ?$$

Der ursprüngliche Satz von der Minimalbasis der R_c sagt bereits, daß das sicher immer geht, und daß man dabei höchstens $(m-1)$ Formen Λ gebraucht. Denn der Unterschied ist doch nur, daß wir jetzt die Form z_3, welche früher unter den K figurirte (vielleicht gleich K_1 war) nun mit unter die Argumente der γ aufgenommen haben. Aber es ist nicht ersichtlich, daß die Anzahl der Λ auf $(m-1)$ steigen muß. Beispiele lehren vielmehr, daß in dieser Hinsicht verschiedene Möglichkeiten vorliegen, sodaß mit unserem Ansatz zugleich eine Einteilung der ebenen, algebraischen Curven (und natürlich der Curven in höheren Räumen) gegeben ist.

Die einfachsten Curven im Sinne dieser Einteilung werden natürlich diejenigen Curven

des R_2, R_3, ... ein, bei denen das System der Λ aus der einzigen Form Λ_0 = Const. besteht, bei denen sich also die Γ mit den γ decken, bei denen die z, wie man sich wohl ausdrückt, ein volles Formensystem bilden. Ich habe diese Curven als elementare Curven bezeichnet. In einer Dissertation zeigt Hr. White (1898), dass die einfach überdeckten, ebenen Curven ohne Doppelpunkt, wie die einfach überdeckten, doppelpunktfreien Raumcurven, die der volle Schnitt zweier Flächen sind, elementare Curven sind. Das ist natürlich ein Satz, der seitens der Geometer immer als selbstverständlich angesehen wurde, wie ja überhaupt in der analytischen Geometrie Vieles richtig gemacht worden ist, ohne dass man die vollen Beweisgründe für die Richtigkeit zur Hand gehabt oder sich völlig klar gemacht hätte.

Dass aber nicht alle ebenen Curven Elementarcurven sind, zeigt z. B. eine ebene Curve 4. Ordnung $f(z_1 z_2 z_3) = 0$ mit 2 Doppelpunkten. Wir legen durch die Doppelpunkte eine Gerade, $\Pi = 0$, und einen Kegelschnitt Λ. So erweist sich $\frac{\Lambda}{\Pi}$ als eine lineare, algebraische Form Γ_1, ohne eine lineare rationale Form der $z_1 z_2 z_3$ zu sein.

Daß sie letzteres in der Tat nicht ist, folgt sofort aus dem <u>Nöther'schen Fundamentalsatz der ebenen Curven.</u>

Wollen wir doch die Bedeutung, welche der Nöther'sche Fundamentalsatz für die hier vorliegende Auffassung besitzt, etwas näher kennzeichnen.

Mi. 3.2.92. Beim Nöther'schen Satz handelt es sich zunächst um eine Fragestellung, die sich auf <u>ganze, rationale ternäre</u> Formen bezieht. Es seien drei solcher Formen f, φ, ψ; wann kann ich setzen:

$$f = A\varphi + B\psi,$$

unter A, B gleichfalls ganze rationale ternäre Formen verstanden? Der bequemen Ausdrucksweise wegen führe man geometrische Sprechweise ein; wir haben dann drei „Curven" $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ in Betracht zu ziehen, und können das Resultat (eben den Nöther'schen Fundamentalsatz) dahin aussprechen, daß die Curve f mit ihren Coefficienten einer Reihe linearer Bedingungen zu genügen hat, von denen sich je eine Serie auf den einzelnen Schnittpunkt der Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bezieht. Die Bedingungen sagen vor allen Dingen aus, daß $f = 0$ durch

jeden gemeinsamen Punkt von $\varphi=0$ und $\psi=0$ mit einer gewissen Multiplicität hindurchgehen muss; sie sind aber, sobald es sich um vielfache Schnittpunkte von $\varphi=0$ und $\psi=0$ handelt, durch diese Angabe noch nicht erschöpft, sondern es treten dann (für die Coefficienten von f) noch weitere lineare Bedingungen hinzu, welche sich nur schwer in Worte fassen lassen. Vergleiche *Nöther* in Ann. 2 und 6, *Bacharach's* Dissertation von 1891 (Erlangen), *Voss*, Annalen 27, *Stickelberger und Nöther*, Ann. 30, *Bertini und Nöther*, Ann. 34.

Wie werden wir nun diesen Satz auffassen? Es wird uns nur insoweit interessiren, als wir $\varphi=0$ setzen, d. h. nur soweit, als es sich auf algebraische Functionen auf $\varphi=0$ bezieht. Es handelt sich dann um die Gleichung $\frac{f}{\psi} = B$ (mod. φ).

Da steht linker Hand der Quotient zweier rationaler ganzen Formen, wir können sagen: der Quotient zweier Formen γ: $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, rechter Hand aber eine ebensolche Form, sagen wir γ_3. Die Frage ist also: *wann können wir einen Quotienten zweier γ einem neuen γ gleichsetzen?*

Hierzu gehört dann natürlich, dass γ_1/γ_2 auf $\varphi=0$ überhaupt eine *ganze* Form, also eine Frei-

das ist es, was durch die zuerst auftretenden Bedingungen ausgesprochen wird, die sich auf die „Multiplicität" beziehen, mit welcher die „Curve" $f=0$ durch jeden „Schnittpunkt" von $\varphi=0$, $\psi=0$ hindurchlaufen soll. Aber nun kommen die weiteren Bedingungen, und die müssen offenbar dieses bedeuten, dass unsere Γ eine γ wird. Indem wir hierauf alles Gewicht legen, werden wir sagen dürfen, dass der Nöther'sche Satz geradezu darauf hinausläuft, zu untersuchen, wann (auf $\varphi=0$) eine in der Gestalt $\frac{\psi}{\chi}$ gegebene Γ eine γ ist. Der Satz bestätigt also, dass keineswegs jede Γ eine γ zu sein braucht, und giebt uns einen Ansatz, um für die Curve $\varphi=0$ die Minimalbasis der zugehörigen Γ wirklich aufzustellen.

Wollen wir doch betreffs der verschiedenen Curven, die wir im R_1, R_2, R_3 ...... zu einer gegebenen Riemann'schen Fläche hinzuconstruiren mögen, noch zwei Fragen stellen:

a) Wir wollen erstlich fragen, wie die Coordinaten $z_1, z_2 \ldots\ldots z_\mu$ der einen Curve mit den Coordinaten $z_1', z_2' \ldots\ldots z_\mu'$ der anderen Curve

analytisch zusammenhängen mögen.

b). Wir wollen zweitens einige Bemerkungen darüber machen, wie man nun auf jeder einzelnen dieser Curven alle die algebraischen Functionen und Integrale, die wir in abstracto auf der Riemann'schen Fläche haben kennen lernen, zur analytischen Darstellung bringen kann.

Ad a) werden wir bequemer Weise die „Punktgruppen" der Riemann'schen Fläche heranziehen, welche einerseits auf der Curve der z, die wir C_m nennen, durch die zugehörigen, algebraischen Formen ersten, zweiten ... Grades; d. h. durch die $\Gamma_1, \Gamma_2 \dots$ festgelegt werden, andererseits auf der Curve der z', die wir C'_m nennen durch die zugehörigen $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3, \dots$. Erstere Punktgruppen werden wir „Normalgruppen" der C_m nennen, letztere Normalgruppen der C'_m. Da ist es nun im Allgemeinen ausgeschlossen, daß die Normalgruppen der C'_m, unter den Normalgruppen der C_m enthalten sein sollen, oder umgekehrt: es müßte ja sonst m jedenfalls ein Teiler von m' sein, oder umgekehrt, und auch das würde, wie unnötig ist auszuführen, noch keineswegs ausreichen. Daher der Grundsatz:

Man kann im Allgemeinen weder die $z'_1, \dots z'_\mu$ irgendwelchen Formen Γ_ϱ, noch die $z_1, \dots z_\mu$ irgendwelchen Formen Γ'_ϱ gleich setzen; vielmehr muss man sich darauf beschränken, zu fragen, welchen Formen Γ_ϱ man die z'_i bez. welchen Formen Γ'_ϱ man die z proportional setzen kann. Und bei dieser Fassung ist die Fragestellung in der Tat sofort zu erledigen; man denke nur daran, wie wir oben eine irgendwie auf der Riemann'schen Fläche vorgegebene, algebraische Function f als Quotienten zweier Formen Γ_ϱ dargestellt haben. Die Sache ist einfach folgende: Man wird auf die mannigfachste Weise eine Punktgruppe Π' finden können, welche die Punktgruppe $z'_1 = 0$ zu einer Normalgruppe ϱ^{ten} Grades der C_m ergänzt. Dieselbe Punktgruppe Π' leistet dann das Gleiche für alle Punktgruppen $z'_1 = 0$, $z'_2 = 0 \dots z'_\mu = 0$; denn letztere Punktgruppen sind untereinander aequivalent.

Daher kann man die $z'_1, z'_2 \dots z'_\mu$ mit Formen Γ_ϱ proportional setzen, welche sämmtlich in den Punkten der Gruppe Π' verschwinden. Entsprechend wird man die $z_1, \dots z_\mu$ solchen Γ'_ϱ proportional setzen, welche ihrerseits in den Punkten einer geeigneten Punktgruppe Π

sämmtlich verschwinden. (Gebundene Formen, nach der früher bei Gelegenheit gebrauchten Ausdrucksweise).

St. 6.2.92. Ad. b) haben wir die Aufgabe, auf jeder irgendwie gegebenen Curve des R_1, R_2, R_3, ... die algebraischen Functionen, bez. Integralfunctionen, welche auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche existiren, wirklich analytisch darzustellen. Was Curven des R_1 angeht, so dürfen wir uns kurz auf Kap. IV dieser Vorlesung beziehen, nur daß dort nicht von „Curven des R_1" sondern von „Riemann'schen Flächen über der z-Ebene" die Rede war. Die Geometer haben, von Clebsch beginnend, für die zweite analytische Darstellung ganz besonders die Curven des R_2 zu Grunde gelegt. In der Tat beziehen sich die große Mehrzahl der Entwickelungen von Brill und Nöther etc. etc. auf ebene Curven.

Wir werden alle diese Entwickelungen aufnehmen und von unserem Standpunkte aus durchdenken müssen. Hier nur ein paar Einzelheiten, die ich willkürlich herausgreife, und die schon genügen werden, um erkennen zu lassen, wie für uns, die wir von den Grundansichten der Riemann'schen Theorie ausgehen, der Gedankengang der Geometer jedesmal umgeordnet werden muß.

Sei $f(z_1, z_2, z_3) = 0$ die vorgelegte Curve. Es ist dann in den genannten Untersuchungen immerzu von „adjun-

girten" Curven $f(z_1 z_2 z_3) = 0$ die Rede. Inzwischen sind es nicht eigentlich die „Curven" $f = 0$, sondern die Formen f, welche in Betracht kommen. Statt f werden wir gleich lieber φ schreiben wollen, da für uns der Buchstabe φ als Zeichen rationaler ganzer Formen von $z_1 z_2 z_3$ typisch geworden ist. Wann wird man eine solche Form von γ (die wir einzig „auf der Curve $\varphi = 0$ betrachten) zur Curve adjungirt nennen? Wenn der Quotient von γ und der „Polare" eines beliebigen Punktes c_1, c_2, c_3, d. h. wenn der Quotient $\frac{\gamma}{c_1\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}+c_2\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}+c_3\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}}$ [insofern wir in diesem Quotienten: c_1, c_2, c_3 als unbestimmte Grössen ansehen] in allen singulären Punkten von $\varphi = 0$ endlich bleibt. Da wäre nun zuerst zu überlegen, weshalb man (wie dies die Geometer thun), jede auf $\varphi = 0$ existirende, algebraische Function als Quotienten zweier adjungirter γ darstellen kann. Dann aber die Darstellung der Integrale! Um nur von den Integralen erster Gattung zu sprechen, so ist von vornehorein klar, dass sich ein solches an der Curve $\varphi = 0$ durch eine Formel folgender Art darstellen lässt:

$$w = \int \frac{(c\,z\,dz)}{\Sigma\, c_i \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}} \cdot (\Gamma_{n-3}),$$

wo Γ_{n-3} eine zur Curve „adjungirte" algebraische Form Γ der $(n-3)^{\text{ten}}$ Dimension darstellt. Statt dessen schreiben

die Geometer: $w = \int \frac{(c\, z\, d\, x)}{\sum c_i \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}} \cdot (\gamma_{n-3})$

d.h. sie ersetzen die adjungirten Γ_{n-3} durch adjungirte γ_{n-3}. Soll dies berechtigt sein, so müssen die adjungirten Γ_{n-3} mit den adjungirten γ_{n-3} zusammenfallen. Wie beweist man das? Es ist kein Zweifel, daß in den Entwickelungen der Geometer alle hierfür in Betracht kommenden Momente implicite vorhanden sind. Aber sie müssen für unsere Zwecke herauspräparirt und in ganz andere Reihenfolge gebracht werden. So definiren die Geometer die Zahl p geradezu als die Zahl der Constanten, welche in den adjungirten γ_{n-3} enthalten sind, und haben dann natürlich zu zeigen, daß diese Zahl p, wie überhaupt die adjungirten γ_{n-3} bei beliebiger, eindeutiger Transformation der Grundcurve $\varphi = 0$ erhalten bleiben. Für uns ist umgekehrt die Unveränderlichkeit der Zahl p wie der Integrale w bei beliebiger, eindeutiger Transformation der Grundcurve der selbstverständliche Ausgangspunkt und der Beweis hat sich, wie gerade bemerkt, darauf zu erstrecken, daß die Identität der adjungirten Γ_{n-3} und γ_{n-3} entwickelt wird.

Nun könnten wir weiter von der Darstellung

der Functionen und Integrale auf Curven des R_3 etc. sprechen, wofür ja auch Untersuchungen der Geometer insbesondere von Nöther vorliegen (Adjungirte Flächen etc.). Wir wollen uns aber dabei nicht aufhalten, sondern nur noch Einiges über folgende Frage sagen.

Wenn eine Riemann'sche Fläche vorgelegt ist, welches ist diejenige Curve, auf der man die zugehörigen Functionen, insbesondere die Integrale, am einfachsten zur analytischen Darstellung bringt?

Ich habe für diesen Zweck früher die kanonische Fläche über der z-Ebene, d.h., wie wir uns jetzt ausdrücken werden, die kanonische Curve des R_i in Vorschlag gebracht. Eine solche Curve war dadurch charakterisirt, daß die $2p-2$ Punkte, in denen irgendein Differential erster Gattung dw verschwindet, auf ihr die Nullstellen einer algebraischen Form Γ_d waren (sodaß $dw_1 : dw_2 \cdots dw_p$ mit p Formen d^{ten} Grades $\varphi_1 : \varphi_2 : \cdots \varphi_p$ proportional gesetzt werden konnten, welche keinerlei feste Nullstellen gemein hatten). Genauso werden wir jetzt die kanonischen Curven eines beliebig ausgedehnten Raumes definiren (vergl. Anm. 36, meine Arbeit über die Abel'schen Functionen) Und diese ver-

den dann, wie ich hier nicht in's Einzelne nachweise, für die Darstellung der Integrale dieselben Vorteile bieten, wie die kanonischen Curven des R_i. An der Spitze aller dieser kanonischen Curven aber steht die "Vollcurve", welche der Annahme $d=1$ entspricht, d.h. die C_{2p-2} des R_{p-1}, deren Coordinaten $z_1 : z_2 : \cdots z_p$ direct mit den $dw_1 : \cdots dw_p$, d.h. den $\varphi_1 : \varphi_2 : \cdots \varphi_p$ proportional sind. Diese Curve der φ ist die allgemeine Normalcurve, welche wir bei allen Untersuchungen über analytische Darstellung unserer Functionen solange am besten zu Grunde legen, als nicht durch die besondere Art der Fragestellung andere Curven (insbesondere andere kanonische Curven) bevorzugt erscheinen.

Dies sind nur erst einige der Momente, welche bei einer ausführlichen Vergleichung der Riemann'schen Theorie mit der Theorie der algebraischen Curven in Betracht kommen. Die allseitige Durchführung dieser Vergleiches soll die Aufgabe des zweiten Teiles der gegenwärtigen Vorlesung sein, den wir nun unmittelbar beginnen und für den wir das ganze Sommersemester in Anspruch nehmen. Wollen wir doch noch

ausdrücklich hervorheben, dass bei diesem Unternehmen die Theorie der algebraischen Curven selbstverständlich nicht nur Impulse seitens der Riemann'schen Theorie erfahren wird, sondern auf letztere ihrerseits fördernd und weiterbildend einwirken muss. Ich möchte in dieser Hinsicht hier gleich dreierlei hervorheben:

1) die Bedeutung, welche die Invariantentheorie der Curven für die Riemann'sche Theorie gewinnt. Wir werden z. B. lernen, dass die $3p-3$ „Moduln" der Riemann'schen Fläche die „absoluten Invarianten" der Normalcurve C_{p-2} der φ sind. Andererseits werden wir uns fragen müssen, was auf der Riemann'schen Fläche die Punkte bedeuten, in denen irgendwelche Grundcurve von einem covarianten Gebilde geschnitten wird. Was insbesondere bedeutet, für die Riemann'sche Theorie, das in der Curventheorie herrschende Gesetz der Dualität?

2). die grosse Entwickelung, welche in der Theorie der algebraischen Curven die Abzählungstechnik gewonnen hat. Wir haben da das sogenannte „Correspondenzprincip" von Brill und Cayley, wir haben die Methoden der „abzäh-

lenden Geometrie" (Schubert).

Wie sind die vom Riemann'schen Standpunkte aus anzusehen? Hurwitz hat da einen vielversprechenden Anfang gemacht. (Math. Ann. 28).

3) Endlich muß ich der Realitätsbetrachtungen gedenken, zu denen die Curventheorie notwendig Anlaß giebt, wenn man sich der ursprünglichen Bedeutung der ganzen in ihr benutzten Terminologie nicht absichtlich verschließen will. Welche Bedeutung haben für die Riemann'sche Fläche die Punkte eines reellen Curvenzuges? Kann man vom Riemann'schen Standpunkte aus irgendwelche neue Einsicht in die Frage gewinnen, wieviele von den Vorkommnissen, deren allgemeine Zahl man durch das Correspondenzprincip auf einer Curve festlegt, im besonderen Falle reell sein werden?

———— o ————

Mi. 11.1.92. **Zweiter Teil. – Beziehungen von Riemann's Theorie zur Lehre von den algebraischen Curven.**

Indem wir uns vorstellen, im Sommersemester einzelne Punkte noch ausführlicher zu behandeln, beginnen wir hier mit einem allgemeinen Bericht über die Sachlage:

I. Allgemeiner Bericht

Wir handeln zunächst von den ebenen Curven, dann von den Curven im dreidimensionalen und überhaupt in höheren Räumen.

Ia. Ebene Curven.

1. [illegible] über die Grundlegung der Theorie [illegible] algebraischen Curven [illegible] verschiedentlich [illegible] worden [illegible] durchaus [illegible] ordinii [illegible]. Ferner von [illegible] wie die [illegible] Curven [illegible] Theorie [illegible]

Poncelet's „Traité des propriétés projectives" die beiden Umformungen der neueren Geometrie in den Vordergrund des geometrischen Interesses gerückt waren: die Umformung durch Projektion und die Umformung durch Dualität. Poncelets Werk war 1822 erschienen. Blicken wir zunächst nur auf die Periode bis 1840, so haben wir da einerseits die „Synthetiker" wie Steiner und Chasles, die unter Beiseiteschiebung des Apparates der analytischen Geometrie durch bloße Construktion und Betrachtung geeigneter Figuren den neuen Gedankeninhalt der Geometrie zu umspannen suchten, andererseits die „Analytiker", wie Moebius und Plücker, die vielmehr auf eine Vervollkommnung des analytischen Apparates hinarbeiteten. Dort Ausgang von den geometrischen, sich wechselseitig dual entgegenstehenden „Grundgebilden", die „projektiv" aufeinander bezogen, die Gebilde zweiten Grades in einfachster Weise „erzeugten"; hier Verallgemeinerung des Coordinatenbegriffs und geometrische Interpretation der jeweils durch Transformation herstellbaren Gleichungsformen des Gebildes.

Heutzutage wird kein Zweifel mehr darüber sein, daß die Prinzipien der Analytiker die weitertragenden

Mi. 10.2.92. **Zweiter Teil. – Beziehungen von Riemann's Theorie zur Lehre von den algebraischen Curven.**

Indem wir uns vorstellen, im Sommersemester einzelne Punkte noch ausführlicher zu behandeln, beginnen wir hier mit einem allgemeinen Bericht über die Sachlage:

I. Allgemeiner Bericht

Wir handeln zunächst von den ebenen Curven, dann von den Curven im dreidimensionalen und überhaupt in höheren Räumen.

Ia. Ebene Curven.

A. Historisches über die Grundlegung der Theorie

Die Theorie der ebenen algebraischen Curven ist bereits im vorigen Jahrhunderte verschiedentlich in Angriff genommen worden: so von Newton 1711 in seiner bemerkenswerten (durchaus projectiven) „Enumeratio linearum tertii ordinis" anschliessend daran von Maclaurin, ferner von Euler und Cramer (in Genf), denen wir die ersten Untersuchungen über Curven vierter und höherer Ordnung verdanken. Inzwischen datirt die eigentliche Entwickelung der Theorie erst von der Zeit, wo unter dem Einflusse von

Poncelet's „Traité des propriétés projectives" die beiden Umformungen der neueren Geometrie in den Vordergrund des geometrischen Interesses gerückt waren: die Umformung durch Projektion und die Umformung durch Dualität. Poncelets Werk war 1822 erschienen. Blicken wir zunächst nur auf die Periode bis 1840, so haben wir da einerseits die „Synthetiker", wie Steiner und Chasles, die unter Beiseiteschiebung des Apparates der analytischen Geometrie durch blosse Construktion und Betrachtung geeigneter Figuren den neuen Gedankeninhalt der Geometrie zu umspannen suchten, andererseits die „Analytiker", wie Moebius und Plücker, die vielmehr auf eine Vervollkommnung des analytischen Apparates hinarbeiteten. Dort Ausgang von den geometrischen, sich wechselseitig dual entgegenstehenden „Grundgebilden", die „projektiv" aufeinander bezogen, die Gebilde zweiten Grades in einfachster Weise „erzeugten"; hier Verallgemeinerung des Coordinatenbegriffs und geometrische Interpretation der jeweils durch Transformation herstellbaren Gleichungsformen des Gebildes.

Heutzutage wird kein Zweifel mehr darüber sein, dass die Principien der Analytiker die weitertragenden

gewesen sind. In der Tat fehlte den Synthetikern Zweierlei, um eine allgemeine Theorie der algebraischen Gebilde in Angriff zu nehmen: einerseits die Definition der imaginären Elemente, andererseits eine Begriffsbestimmung des Algebraischen überhaupt. Nun hat man ja später Beides, wie sogleich noch näher ausgeführt werden soll, in synthetischer Form entwickelt, aber man hat dabei das eigentliche Princip der synthetischen Geometrie zur Seite schieben müssen. Dieses Princip, wie es in der Theorie der geradlinigen Figuren und der Gebilde zweiten Grades so glänzend hervortritt, ist die unmittelbare Beweiskraft der anschauungsmässigen Construction. Statt dessen verfährt die analytische Geometrie wesentlich „algorithmisch", d. h. sie gewinnt ihre Resultate durch Aneinanderreihung zahlreicher kleiner Schritte, von denen immer nur der einzelne unmittelbar als selbstverständlich gelten kann. Und nun hat die synthetische Geometrie, um zu dem erwähnten Ziele zu kommen, sich auch genötigt gesehen, sich algorithmisch auszugestalten, nur dass sie statt des Algorithmus der 4 Rechenoperationen, der in der analytischen Geometrie herrscht, sich einen eigenen Algorithmus ersonnen hat! Umgekehrt kann man

sagen, daß in der analytischen Geometrie neben der Rechnung immermehr die Anschauung Boden gewonnen hat: die rechnerischen Einzelheiten zurückschieben und dafür den großen Zusammenhang der Gedankenentwickelung zu erfassen, das war jedenfalls für Plücker das eingestandene Ziel, welches er mit seiner Theorie der algebraischen Curven 1839 (Bonn) verfolgte. Zwei Gegenstände sind es, mit denen sich Plücker in diesem Werke ganz besonders beschäftigt:

1). Die Schnittpunktsätze, denen zufolge zwischen den m n Schnittpunkten zweier algebraischer Curven m^ter^ und n^ter^ Ordnung Relationen bestehen, aus denen die merkwürdigsten geometrischen Beziehungen abgeleitet werden können. Plücker betrachtet hier überall nur den sogenannten allgemeinen Fall: seine Beweise beschränken sich meist auf bloßes Constantenzählen und bedürfen daher, trotzdem sie im Princip richtig sind, noch der wesentlichen Ergänzung: daß man die möglichen Ausnahmefälle bezeichnet und deren Bedeutung darlegt. Charakteristisch ist auch, daß er die Schnittpunkte in erster Linie zur Discussion einer Frage benutzt, die uns heute kaum noch interessirt: der Frage nach der Natur der bei einer Curve n^ter^ Ordnung auftretenden Asymptoten. Plücker hatte.

eben damals noch keineswegs das projective Princip: nur solche Eigenschaften der Curven zu beachten, welche bei beliebiger Projection ungeändert bleiben, rücksichtslos aufgenommen, er betrachtete die Curven nach ihren gestaltlichen Eigenschaften, mit denen sie uns entgegentreten.

2). Die Wechselbeziehungen zwischen den Singularitäten einer Curve (die sog. Plücker'schen Formeln).

Ist n die Ordnung, k die Classe, d die Zahl der Doppelpunkte, v die der Rückkehrpunkte, t die Zahl der Doppeltangenten, w die der Wendetangenten, so hat man die 4 Relationen:

1). $k = n.n-1-2d-3v$, 2) $n = kk-1-2t-3w$,
3). $w = 3n.n-2-6d-8v$, 4) $v = 3k.k-2-6t-8w$,

die den Wert von drei unabhängigen Beziehungen haben, insofern aus 1) und 3), wie aus 2) und 4) gemeinsam folgt: $3(k-n) = w - v$. —

Doch wollen wir zunächst davon sprechen, wie sich die Synthetiker allmählich zum allgemeinen Begriff der algebraischen Curve erhoben haben.

Es geschah dies zunächst so, daß man die functionentheoretische Grundlage (wie man heute sagen würde) der analytischen Geometrie festhielt, (also das Bezout'sche Theorem, demzufolge sich eine Curve m^{ter} und

n^{ter} Ordnung in $m\,n$ Punkten schneiden) und nun das *Princip der projectiven Erzeugung*, das sich in der Theorie der Kegelschnitte so fruchtbar erwiesen hatte, festhielt.

Der Kegelschnitt wird gewonnen, indem man zwei projective Geradenbüschel zum Schnitt bringt, entsprechend dem analytischen Umstande, dass aus $p - \lambda q = 0$, $r - \lambda s = 0$ durch Elimination des λ $ps - qr = 0$ hervorgeht. Die Curven n^{ten} Grades lassen sich entsprechend ableiten, wenn man zwei *Curvenbüschel*, das eine aus Curven der Ordnung n', das andere aus Curven der Ordnung n'' bestehend, projectiv aufeinander bezieht und zum Schnitt bringt; dabei muss nur $n' + n'' = n$ sein. Das ist die Theorie, welche in den fünfziger Jahren insbesondere von *Chasles* und *de Jonquières* entwickelt wurde.

Die eigentliche principielle Schwierigkeit war damit, wie man sieht, keineswegs erledigt. Was bedeutet auf diesem Standpunkte auch nur das Theorem von der projectiven Erzeugung eines Kegelschnitts durch zwei Strahlbüschel, sofern es sich um einen reellen, nullteiligen Kegelschnitt handelt (d. h. eine Curve 2ter Ordnung, die durch eine reelle Gleichung vorgestellt wird, der kein reeller Punkt Genüge leistet)? Was erst das gleiche Theorem für eine Curve zweiter Ordnung mit complexen Coefficienten? Die grosse, hier vorhandene Lücke ausgefüllt zu haben, je-

eben damals noch keineswegs das projektive Prinzip: nur solche Eigenschaften der Curven zu beachten, welche bei beliebiger Projektion ungeändert bleiben, rücksichtslos aufgenommen, er betrachtete die Curven nach ihren gestaltlichen Eigenschaften, mit denen sie uns entgegentreten.

2). Die Wechselbeziehungen zwischen den Singularitäten einer Curve (die sog. Plücker'schen Formeln).
Ist n die Ordnung, k die Klasse, d die Zahl der Doppelpunkte, r die der Rückkehrpunkte, t die Zahl der Doppeltangenten w die der Wendetangenten, so hat man die 4 Relationen:

1). $k = n.\overline{n-1} - 2d - 3r$, 2) $n = k\overline{k-1} - 2t - 3w$,
3). $w = 3n.\overline{n-2} - 6d - 8r$, 4) $r = 3k.\overline{k-2} - 6t - 8w$,

die den Wert von drei unabhängigen Beziehungen haben, insofern aus 1) und 3), wie aus 2) und 4) gemeinsam folgt: $3(k-n) = w - r$. —

Doch wollen wir zunächst davon sprechen, wie sich die Synthetiker allmählich zum allgemeinen Begriff der algebraischen Curve erhoben haben.

Es geschah dies zunächst so, dass man die funktionentheoretische Grundlage (wie man heute sagen würde) der analytischen Geometrie festhielt, (also das Bezout'sche Theorem, demzufolge sich eine Curve m^{ter} und

n^{ter} Ordnung in $m\,n$ Punkten schneiden) und nun das Princip der projectiven Erzeugung, das sich in der Theorie der Kegelschnitte so fruchtbar erwiesen hatte, festhielt.

Der Kegelschnitt wird gewonnen, indem man zwei projective Geradenbüschel zum Schnitt bringt, entsprechend dem analytischen Umstande, dass aus $p-\lambda q=0$, $r-\lambda s=0$ durch Elimination des λ $ps-qr=0$ hervorgeht. Die Curven n^{ten} Grades lassen sich entsprechend ableiten, wenn man zwei Curvenbüschel, das eine aus Curven der Ordnung n', das andere aus Curven der Ordnung n'' bestehend, projectiv aufeinander bezieht und zum Schnitt bringt; dabei muss nur $n'+n''=n$ sein. Das ist die Theorie, welche in den fünfziger Jahren insbesondere von Chasles und de Jonquières entwickelt wurde.

Die eigentliche principielle Schwierigkeit war damit, wie man sieht, keineswegs erledigt. Was bedeutet auf diesem Standpunkte auch nur das Theorem von der projectiven Erzeugung eines Kegelschnitts durch zwei Strahlbüschel, sofern es sich um einen reellen, nullteiligen Kegelschnitt handelt (d. h. eine Curve 2ter Ordnung, die durch eine reelle Gleichung vorgestellt wird, der kein reeller Punkt Genüge leistet)? Was erst das gleiche Theorem für eine Curve zweiter Ordnung mit complexen Coëfficienten?

Die grosse, hier vorhandene Lücke ausgefüllt zu haben, je-

denfalls soweit als Gebilde zweiten Grades in Betracht kommen, das ist das Verdienst v. Staudt's [Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg, 1856-1861].

Ich brauche hier kaum zu entwickeln, wie v. Staudt dem imaginären Punkte, bez. der imaginären Geraden eine reale Interpretation verschafft: der imaginäre Punkt wird gedeutet:

durch die reelle Gerade, die ihn mit dem conjugirt imaginären Punkte verbindet,

durch die reelle Involution auf dieser Geraden, deren Doppelelemente der imaginäre Punkt und sein conjugirter sind,

endlich durch den Sinn, welcher der reellen, geraden Linie beigelegt wird. —

die imaginäre, gerade Linie dualistisch entsprechend.

Dagegen muss ich darauf aufmerksam machen, wie v. Staudt die Curven zweiter Ordnung einführt, indem er nicht sowohl die Curven, sondern die zugehörigen Polarsysteme construirt, also nicht sowohl die quadratischen Gleichungen $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, sondern die bilinearen Gleichungen $\Sigma a_{ik} x_i y_k = 0$ in Betracht zieht. Die Curve erscheint dabei als die Coincidenzcurve ihres Polarsystems, d. h. als Ort solcher Punkte x, welche der ihnen zugeordneten, geraden Linie y selbst

angehören. Diese Definition hat ihre grosse Berechtigung. – Um es modern auszudrücken: unmittelbar, „lineal", construiren kann man nur rationale Elemente, also die Polargeraden y rationaler Punkte x. Indem wir zu den Punkten der Curve übergehen, vollziehen wir eine „Adjunction" die jenseits der ausführbaren Constructionen liegt, – womit die Frage nicht beseitigt sein soll, wie weit man dann weitere Curvenpunkte construiren kann, sobald man einen ersten Curvenpunkt adjungirt hat. –

v. Staudt selbst hat, wie gesagt, diesen Ansatz nur für die Gebilde zweiten Grades durchgeführt. Aber es steht einer Ausdehnung auf beliebige höhere Gebilde nichts anderes entgegen, als die steigende Complication der Betrachtung. Den allgemeinen Fall erläutert wohl zuerst Fr. Thieme in Bd. 24 von Schlömilch's Zeitschrift (1879), folgeweise an Beispielen in dmalen 23 (1884) und 28 (1887). Das gleiche Ziel verfolgt Dr. E. Kötter mit seiner Preisarbeit in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1887 (Grundzüge einer reingeometrischen Theorie der algebraischen Curven. –

Es giebt übrigens noch einen dritten Weg,*) den [Di. 13.2.92]

*) neben der projectiven Erzeugungsweise und der Definition durch die Polarsysteme.

Begriff der algebraischen Curve rein geometrisch zu fassen. Derselbe rührt von Graßmann her, und wurde von demselben leider nicht soweit verfolgt, als er es verdient haben würde. <u>Graßmann construirt „lineale" Mechanismen, welche es gestatten, eine beliebige, algebraische Curve zu zeichnen, sobald man einen ersten Punkt derselben kennt.</u> (vergl. Crelle's Journal Bd. 31, 36, 42, 52). Als einfachstes Beispiel für einen solchen Mechanismus mag man <u>Maclaurin's</u> Construction der Kegelschnitte heranziehen. Ein Punkt x beschreibt einen Kegelschnitt, wenn er Spitze eines Dreiecks ist, dessen Seiten sich um drei feste Punkte a, b, c drehen, während die beiden anderen Ecken auf festen, geraden Linien A, B fortschreiten (symbolisch geschrieben:

$(x\, a\, A\, b\, B\, c\, x) = 0$):

Bei dieser Construction ist, wie man sofort sieht, nicht nötig — und das unterscheidet den Mechanismus von einem gewöhnlichen Gelenkwerk (linkwork) —, daß die Punkte a, b, c oder auch x auf den hindurchgehenden Geraden fest sind, welche in a, b, c etc. durch drehbare Oesen hindurchlaufen. Nur die Geradlinigkeit der Drähte, nicht ihre Eigenschaft einen der Länge nach

unveränderlichen Körper vorzustellen, wird benutzt. Eben darum die Benennung: „linealer" Mechanismus.

Die Idee von Grassmann ist nun die, lineale Mechanismen zu construiren, bei denen der bewegliche Punkt x (der die Curve beschreiben soll) beliebig oft (n-mal) benutzt wird, und zwar zeigt Grassmann, dass man auf die Art allemal eine Curve n^{ter} Ordnung bekommt, und dass man jede Curve n^{ter} Ordnung so erzeugen kann. Im Einzelnen ist da freilich Vieles unbestimmt, insbesondere nicht recht klar, wie man den Mechanismus in einfachster Weise so bestimmt, dass er die allgemeine Curve n-Ordnung erzeugt. Nur für Curven dritter und vierter Ordnung hat Grassmann die Sache näher ausgeführt. So erzeugt er z. B. die C_3 durch die Vorschrift:

$$(xaA,\ xbB,\ xcC) = 0$$

was sagt, dass der Durchschnittspunkt

der Geraden xa mit A,
der Geraden xb mit B,
der Geraden xc mit C

auf einer geraden Linie liegen sollen. (Näheres hierüber, wie insbesondere auch über die Beziehung zur projectiven Erzeugung ebener Curven in Clebsch-Lindemann I, p. 536-541).*) Uebrigens darf man von der

*) wegen der Erzeugung der C_4 vergl. die Leipziger Dissertation von Ungeldorf 1885

praktischen Brauchbarkeit derartiger „linealer Apparate sich keine übertriebene Vorstellung machen. Wir sagten schon, dass man vor allen Dingen einmal (um den Apparat überhaupt einzustellen), einen Punkt x der zu construirenden Curve kennen muss. Von ihm beginnend beschreibt dann der Apparat natürlich nur einen Zug der in Betracht kommenden (vielleicht aus mehreren reellen Zügen bestehenden) algebraischen Curve. Aber selbst das ist nicht einmal richtig, weil man den Apparat nicht anders einrichten kann, als dass er sich selbst sperrt, sodass nur ein Stück des in Betracht kommenden Curvenzuges wirklich realisirt wird. Wie übrigens müsste man den Apparat modificiren, wenn er auch die complexen Punkte der Curve liefern sollte, diese complexen Punkte im Sinne v. Staudt's durch reelle Involutionen auf reellen Geraden gedeutet? Dazu die complexen Punkte einer beliebigen reellen oder complexen Curve!

Nach diesem Excurs über synthetisch-geometrische Aufgaben kehren wir zu unserer eigenen Gedankenentwickelung zurück. Wir wollen v. Staudt's reale Deutung der imaginären Elemente für uns nicht sowohl bei der Definition der algebraischen

ebenen Curven benutzen, – die mag uns nach wie vor durch die algebraische Gleichung $f(s,z)=0$ gegeben sein – als zur *Veranschaulichung* dessen, was mit einer solchen Curve gemeint ist, und damit zum *unmittelbaren Uebergange* von der Curventheorie zur Riemann'schen Theorie. In der Tat, wenn es uns gelingt, die Gesammtheit der reellen und imaginären Punkte oder Tangenten, welche eine Curve besitzen mag, real vor Augen zu sehen, dann haben wir eo ipso ein Aequivalent der Riemann'schen Fläche, an dem wir beispielsweise das p der Curve als wirkliche Zusammenzahl werden bestimmen können müssen!

Und in der Tat muss man ja sagen, dass die gewöhnliche indirecte Art, die Curvenlehre mit der Riemann'schen Theorie in Verbindung zu setzen und (beispielsweise) die Zahl p in die Curvenlehre einzuführen, nicht befriedigen kann. Man macht das ja so, dass man eben die ebene Curve $f(s,z)=0$ [bei der man nur die *reellen* Wertsysteme (s,z), die $f=0$ genügen, vor Augen sieht] in begriffliche Beziehung zu der Riemann'schen Fläche setzt, welche über der $z=x+iy$-*Ebene* der Function $s(z)$ entsprechend construirt werden kann,

und nicht sowohl den Verlauf von φ, als nur die Verzweigung von φ versinnlicht. Das Resultat, welches zuerst Clebsch auf diesem Wege ableitete (Crelle 63, 1863-64: Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie)*) daß nämlich p ebensowohl $= \frac{n-1 . n-2}{2} - d - r$

als $= \frac{K-1 . K-2}{2} - t - w$

sein muß (letzteres, weil der Uebergang zur Reciprocalcurve ein besonderer Fall der eindeutigen Transformation ist, bei welcher das p erhalten bleiben muß), ist ja ebenso elegant als wichtig: aber daß man mit dieser Formel keine tiefere Auffassung der eigentlichen Bedeutung der Zahl p als eines Maaßes für den Zusammenhang der Riemann'schen Fläche verband, daß darauf für die Zahl p die ganze äußerliche Benennung deficience = défaut = Defect Platz greifen konnte**), das ist es, was ich tadele.

Wir müssen unseren neuen Absatz so beginnen, daß ich zunächst von den reellen Punkten und Tangenten der reellen, algebraischen, ebenen Curven handele, also von den reellen Zügen, welche diese Curven darbieten.

B. Anschauungsmäßiges:

---

*) vergl. auch Schwarz sowie Clebsch selbst in Crelle 64.

**) weil nämlich eine Curve vom Geschlechte p p Doppelpunkte oder Spitzen weniger hat, als sie haben müßte, um rational zu sein!

Wir werden die hier zu gebenden Entwickelungen in knapper Form unter eine Reihe besonderer Ueberschriften zusammenfassen:

a) Die reellen Züge der niedersten Ordnungscurven.

Grundlegend für alle hier und bei den folgenden Betrachtungen anzustellenden Entwickelungen ist, dass die projective Ebene, die im Unendlich-Weiten eine Gerade hat (und also nicht einen einzelnen Punkt, wie die Ebene der Functionentheorie), als eine Doppelfläche anzusehen ist. Hierin liegt, dass zwei auf dieser Ebene verlaufende, geschlossene Curven sich nicht notwendig in einer geraden Anzahl von Punkten zu schneiden brauchen, sondern ebenso gern in einer ungeraden Anzahl von Punkten, wofür ja zwei gerade Linien das einfachste Beispiel geben. (Das Paradoxon verschwindet sofort, wenn man zwischen den beiden Seiten der Ebene, der Oberseite und der Unterseite, unterscheidet: indem man sich dann vorstellen muss, dass jede gerade Linie zweimal durchlaufen werden muss, einmal über die Oberseite, das andere Mal über die Unterseite hin, ehe sie in sich zurückkehrt, haben zwei gerade Linien dann in der Tat zwei Schnittpunkte: einen auf der Oberseite, einen auf der Unterseite). Von hier aus bietet sich dann die Unterscheidung der geschlossenen, ebenen Curvenzüge in paare und unpaare, wie sie zuerst v. Staudt (in seiner Geometrie der Lage, 1847) gelehrt hat. Da zwei

unpaare Curvenzüge sich notwendig schneiden, wird eine Curve n^{ter} Ordnung ohne Doppelpunkt notwendig einen oder keinen unpaaren Curvenzug haben, jenachdem n ungerade oder gerade ist. Des Näheren machen wir nun folgende Angaben.

1). Bei den Curven zweiter Ordnung sind zwei Typen zu unterscheiden (sofern wir uns auf reelle Curven beschränken): der einteilige und der nullteilige Typus. Beide Typen haben $p = 0$ und stellen eben darum rationale Curven vor [deren Coordinaten sich rational durch eine Hülfsgrösse λ, welche auf der Curve selber eindeutig ist, darstellen].

2). Bei den Curven dritter Ordnung hat man im Ganzen fünf Typen, die bereits Newton in „seiner Enumeratio Linearum tertii ordinis" unterschieden hat:

für Curven ohne singulären Punkt, d. h. $p = 1$: den einteiligen und den zweiteiligen Typus:

Beidemal trägt der unpaare Curvenzug drei reelle Wendungen. Dass die auf einer geraden Linie liegen müssen, erkennt man leicht aus dem Schnittpunktsatz. Algebraisch zu reden, werden ja 9 Wendepunkte vorhanden sein, die sich dann 12 mal zu je 3 auf eine Gerade anordnen (Plücker)

<u>für Curven mit Doppelpunkt ($p = 0$).</u>

ebenfalls zwei Typen (jenachdem ein isolirter Doppelpunkt, oder ein eigentlicher Doppelpunkt vorliegt, in welchem sich zwei Curvenzüge kreuzen):

Es ist lehrreich, die beiden Fälle aus den voran- gehenden beiden durch Gränzübergang entstehen zu lassen. – Man bekommt Beispiele aller vier Fälle, wenn man eine Gerade nimmt, die einen einteiligen Kegelschnitt schneidet, und nun entweder in dem einen oder anderen Sinne den einen oder auch beide

Schnittpunkte auflöst:

eventuel das Oval, welches sich dabei abgeschnürt hat, sich zum isolirten Punkte zusammenziehen lässt.

Für Curven mit Spitze: einen Typus ($p = 0$): der sich natürlich auch wieder an die vorangehenden Typen durch Continuität anschliesst. */

Man beachte: Von den drei reellen Wendungen werden seitens des gewöhnlichen Doppelpunktes 2, ebenso seitens der Spitze 2, dagegen seitens des isolirten Doppelpunktes keiner absorbirt. Den Plücker'schen Formeln zufolge absorbirt dem entgegen von den 9 überhaupt vorhandenen Wendepunkten jeder Doppelpunkt 6, die Spitze 8: auch das wird augenfällig

---

*/ Von den Curven dritter Ordnung mit $p = 0$ bestehen zwei nur aus einem Zug, während bei der einen noch ein isolirter Doppelpunkt zutritt. Die Curven 2. Ordnung hatten $p = 0$ und waren eintheilig oder nulltheilig. Ist es nun zweckmässig alle Curven $p = 0$ schlechtweg als „unicursale" Curven zu bezeichnen?

hervortreten müssen, sobald es uns gelingt, die Gesammtheit der complexen Elemente der Curve anschaulich zu überblicken.

3). Die Curven vierter Ordnung sind hinsichtlich der bei ihnen möglichen Gestalten, jedenfalls was die Realität der Doppeltangenten angeht, erst von Zeuthen im 7ten Bande der mathematischen Annalen (1874) endgültig untersucht worden. Wir handeln hier nur von den Curven 4. Ordnung ohne singuläre Punkte, d.h. mit $p = 3$. Da haben wir im Ganzen 6 Typen zu unterscheiden: [Abi. 17.2.92]

×

Wir teilen die Doppeltangenten in solche der ersten und zweiten Art: zur ersten Art gehören diejenigen, welche entweder denselben Curvenzug zweimal berühren oder isolirt verlaufen, zur zweiten Art die anderen, welche zwei verschiedene Curvenzüge berühren (von imaginären Doppeltangenten garnicht zu reden). Da ist denn Zeuthen's schöner Satz: dass immer 4 Doppeltangenten der

ersten Art vorhanden sind, daß also in den verschiedenen Fällen

I	II	III	IV	V	VI
bez. 28,	16,	8,	4,	4,	4

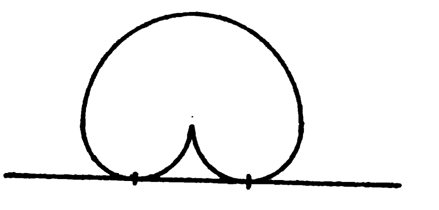
Doppeltangenten reell sind.

b) Uebertragung auf Classencurven.

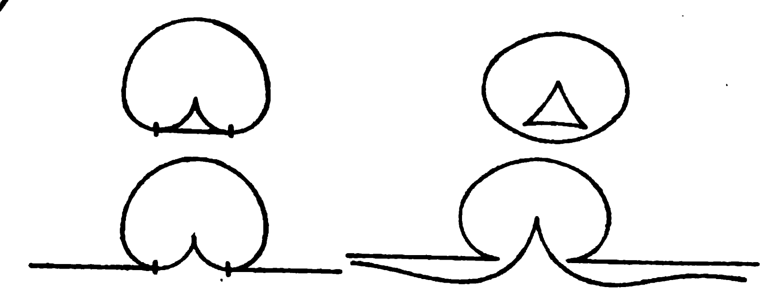
Es ist natürlich nicht schwer, aber doch lehrreich und zu Anfang sogar überraschend, alles das Gesagte auf die Curven zweiter, dritter, vierter Classe zu übertragen. Um hier nur von den Curven dritter Classe zu reden; so werden wir bei ihnen statt des unpaaren Curvenzuges mit drei auf gerader Linie befindlichen Wendungen, der bei der Mehrzahl der Curven dritter Ordnung auftrat, einen Curvenzug mit drei Spitzen haben, die so gegen einander liegen, daß die 3 Spitzentangenten in einem Punkte zusammenlaufen.

Folgendes sind die beiden Typen der Curven dritter Classe mit $p=1$:

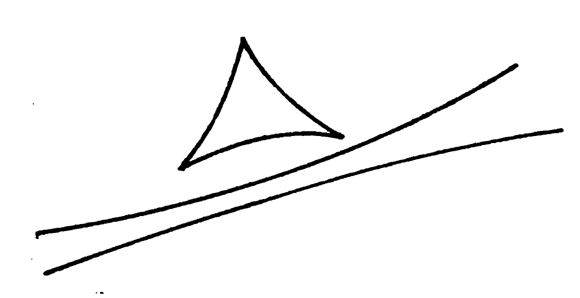
Wir haben dann ferner die Curve 3ter Classe mit nicht isolirter Doppeltangente: $(p=0)$ die sowohl aus dem



zweiteiligen, wie dem einteiligen Typus p = i durch Gränzübergang herausgebracht werden kann, wobei das eine Oval das eine Segment, das andere Oval das andere Segment der Doppelpunkte doppeltzählend aus reellen Stücken der Curvenzüge p = i entstehen:



Um die Curve dritter Classe mit isolirter Doppeltangente herauszubringen, muss man die zweiteilige Curve zuerst so projiciren, dass ihr Oval durch's Unendliche zieht und daher die Gestalt einer Hyperbel annimmt:



ersten Art vorhanden sind, daß also in den verschiedenen Fällen

I	II	III	IV	V	VI
bez. 28,	16,	8,	4,	4,	4

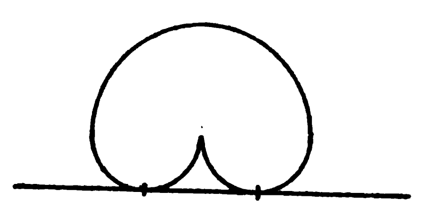
Doppeltangenten reell sind.

b) Uebertragung auf Classencurven.

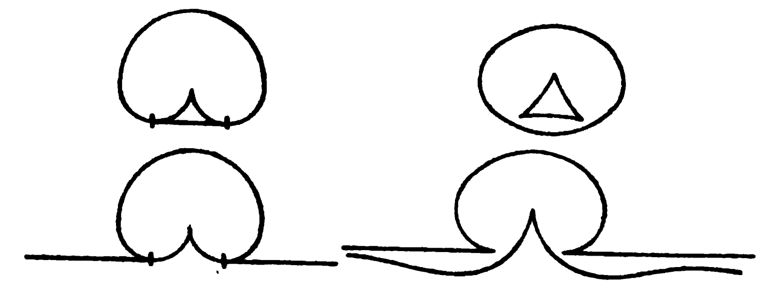
Es ist natürlich nicht schwer, aber doch lehrreich und zu Anfang sogar überraschend, alles das Gesagte auf die Curven zweiter, dritter, vierter Classe zu übertragen. Um hier nur von den Curven dritter Classe zu reden, so werden wir bei ihnen statt des unpaaren Curvenzuges mit drei auf gerader Linie befindlichen Wendungen, der bei der Mehrzahl der Curven dritter Ordnung auftrat, einen Curvenzug mit drei Spitzen haben, die so gegen einander liegen, daß die 3 Spitzentangenten in einem Punkte zusammenlaufen.

Folgendes sind die beiden Typen der Curven dritter Classe mit $p = 1$:

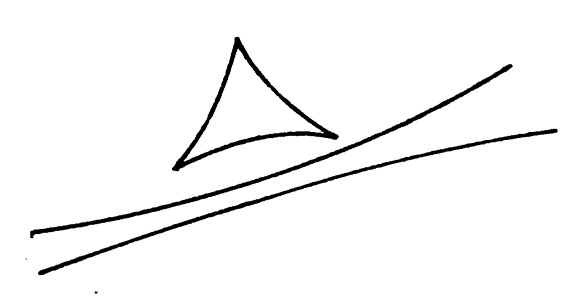
Wir haben dann ferner die Curve 3ter Classe mit nicht isolirter Doppeltangente: ($p = 0$) die sowohl aus dem



zweiteiligen, wie dem eintei-
ligen Typus p = i durch Gränzü-
bergang herausgebracht werden
kann, wobei das eine Oval
das eine Segment, das
andere Oval das andere Segment der Doppelpunkte
doppeltzählend aus reellen Stücken der Curven-
züge p = i entstehen:



Um die Curve dritter Classe mit isolirter Doppel-
tangente herauszubringen, muss man die zwei-
teilige Curve zuerst so projiciren, dass ihr Oval
durch's Unendliche zieht und daher die Gestalt
einer Hyperbel annimmt:



und um die beiden Aeste der Hyperbel (die in der Figur schon sehr bei einander gezeichnet sind) vollends zur doppelzählenden Geraden zusammenfallen lassen:

Endlich haben wir die <u>Curve dritter Classe mit Wendetangente</u>, die nach den Plücker'schen Formeln nichts Anderes ist als eine Curve dritter Ordnung mit Spitze.

Sie erscheint als Uebergang zwischen den beiden Arten der Curven 3. Classe mit Doppeltangente:



c. Curven höherer Ordnung und Classe.

Ueber Curven höherer Ordnung und Classe ist nur erst wenig gearbeitet worden.

Bemerkenswert ist der Gedanke, den Franz Meyer 1879 in seiner Münchener Dissertation entwickelt (Anwendung der Topologie auf die rationalen Curven 4. und 5. Ordnung) nämlich die einteiligen rationalen Curven mit $\frac{n-1 \cdot n-2}{2}$ eigentlichen Doppelpunkten nach der Reihenfolge zu classificiren, mit der auf dem reellen Zuge die zweimaligen Durchsetzungen der verschiedenen Doppelpunkte aufeinander folgen:

Im 10ten Bande der math. Annalen*) hat Harnack den Satz bewiesen, daß eine Curve vom Geschlechte p nicht mehr $p+1$ reelle Züge haben kann, daß aber dieses Maximum der Zügezahl auch immer erreicht werden kann. Ersichtlich stimmt das bei den Curven 2ter, 3ter, 4ter Ordnung oder Classe, die wir vorstehend betrachten.

Ebenda veröffentlichte ich dann meine „neue Relation zwischen den Singularitäten," die sozusagen ein Seitenstück zu den Plücker'schen Formeln ist. Sei n die Ordnung, k die Classe der Curve, und spalte man die d Doppelpunkte und t Doppeltan=

*) 1876.

und nicht sowohl den Verlauf von s, als nur die Verzweigung von s versinnlicht. Das Resultat, welches zuerst <u>Clebsch</u> auf diesem Wege ableitete (Crelle 63, 1863-64: Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie)*/ daß nämlich p ebensowohl $= \frac{n-1.n-2}{2} - d - r$

als $= \frac{K-1.K-2}{2} - t - w$

sein muß (letzteres, weil der Uebergang zur Reciprocalcurve ein besonderer Fall der eindeutigen Transformation ist, bei welcher das p erhalten bleiben muß), ist ja ebenso elegant als wichtig: aber daß man mit dieser Formel keine tiefere Auffassung der eigentlichen Bedeutung der Zahl p als eines Maaßes für den Zusammenhang der Riemann'schen Fläche verband, daß darauf für die Zahl p die ganz äußerliche Benennung deficience = défaut = Defect Platz greifen konnte**/, das ist es, was ich tadele.

Wir müssen unseren neuen Absatz so beginnen, daß ich zunächst von den <u>reellen</u> Punkten und Tangenten der reellen, algebraischen, ebenen Curven handele, also von den reellen Zügen, welche diese Curven darbieten.

<u>B. Anschauungsmäßiger:</u>

---

*/ vergl. auch <u>Schwarz</u> sowie <u>Clebsch</u> selbst in Crelle 64.

**/ weil nämlich eine Curve vom Geschlechte p p Doppelpunkte oder Spitzen weniger hat, als sie haben müßte, um rational zu sein!

Wir werden die hier zu gebenden Entwickelungen in knapper Form unter eine Reihe besonderer Ueberschriften zusammenfassen:

a) Die reellen Züge der niedersten Ordnungscurven.

Grundlegend für alle hier und bei den folgenden Betrachtungen anzustellenden Entwickelungen ist, dass die projective Ebene, die im Unendlich-Weiten eine Gerade hat (und also nicht einen einzelnen Punkt, wie die Ebene der Functionentheorie), als eine Doppelfläche anzusehen ist. Hierin liegt, dass zwei auf dieser Ebene verlaufende, geschlossene Curven sich nicht notwendig in einer geraden Anzahl von Puncten zu schneiden brauchen, sondern ebenso gern in einer ungeraden Anzahl von Puncten, wofür ja zwei gerade Linien das einfachste Beispiel geben. (Dies Paradoxon verschwindet sofort, wenn man zwischen den beiden Seiten der Ebene, der Oberseite und der Unterseite, unterscheidet: indem man sich dann vorstellen muss, dass jede gerade Linie zweimal durchlaufen werden muss, einmal über die Oberseite, das andere Mal über die Unterseite hin, ehe sie in sich zurückkehrt, haben zwei gerade Linien dann in der Tat zwei Schnittpunkte: einen auf der Oberseite einen auf der Unterseite). Von hier aus bietet sich dann die Unterscheidung der geschlossenen, ebenen Curvenzüge in paare und unpaare, wie sie zuerst v. Staudt (in seiner Geometrie der Lage, 1847) gelehrt hat. Da zwei

unpaare Curvenzüge sich notwendig schneiden, wird eine Curve n^{ter} Ordnung ohne Doppelpunkt notwendig einen oder keinen unpaaren Curvenzug haben, jenachdem n ungerade oder gerade ist. Des Näheren machen wir nun folgende Angaben.

1). Bei den *Curven zweiter Ordnung* sind zwei Typen zu unterscheiden (sofern wir uns auf reelle Curven beschränken): der *einteilige* und der *nullteilige* Typus. Beide Typen haben $p = 0$ und stellen eben darum rationale Curven vor [deren Coordinaten sich rational durch eine Hülfsgrösse λ, welche auf der Curve selber eindeutig ist, darstellen].

2). Bei den *Curven dritter Ordnung* hat man im Ganzen *fünf* Typen, die bereits Newton in „seiner Enumeratio linearum tertii ordinis" unterschieden hat:

für Curven ohne singulären Punkt, d. h. $p = 1$: den einteiligen und den zweiteiligen Typus:

Beidemal trägt der unpaare Curvenzug drei reelle Wendungen. Daß die auf einer geraden Linie liegen müssen, erkennt man leicht aus dem Schnittpunktsatz. Algebraisch zu reden, werden ja 9 Wendepunkte vorhanden sein, die sich dann 12 mal zu je 3 auf eine Gerade anordnen (Plücker)

<u>für Curven mit Doppelpunkt ($p = 0$).</u>

ebenfalls zwei Typen (jenachdem ein isolirter Doppelpunkt, oder ein eigentlicher Doppelpunkt vorliegt, in welchem sich zwei Curvenzüge kreuzen):

Es ist lehrreich, die beiden Fälle aus den vorangehenden beiden durch Gränzübergang entstehen zu lassen. – Man bekommt Beispiele aller vier Fälle, wenn man eine Gerade nimmt, die einen einteiligen Kegelschnitt schneidet, und nun entweder in dem einen oder anderen Sinne den einen oder auch beide

Schnittpunkte auflöst:

eventuel das Oval, welches sich dabei abgeschnürt hat, sich zum isolirten Punkte zusammenziehen lässt.

für Curven mit Spitze: einen Typus (p = 0): der sich natürlich auch wieder an die vorangehenden Typen durch Continuität anschliesst.*/

Man beachte: Von den drei reellen Wendungen werden seitens des gewöhnlichen Doppelpunktes 2, ebenso seitens der Spitze 2, dagegen seitens des isolirten Doppelpunktes keiner absorbirt. Den Plücker'schen Formeln zufolge absorbirt dem entgegen von den 9 überhaupt vorhandenen Wendepunkten jeder Doppelpunkt 6, die Spitze 8: auch das wird augenfällig

*/ Von den Curven dritter Ordnung mit p = 0 bestehen zwei nur aus einem Zug, während bei der einen noch ein isolirter Doppelpunkt zutritt. Die Curven 2. Ordnung hatten p = 0 und waren eintheilig oder nulltheilig. Ist es nun zweckmässig alle Curven p = 0 schlechtweg als „unicursale" Curven zu bezeichnen?

hervortreten müssen, sobald es uns gelingt, die Gesammtheit der complexen Elemente der Curve anschaulich zu überblicken.

3). Die Curven vierter Ordnung sind hinsichtlich der bei ihnen möglichen Gestalten, jedenfalls was die Realität der Doppeltangenten angeht, erst von Zeuthen im 7ten Bande der mathematischen Annalen (1874) endgültig untersucht worden. Wir handeln hier nur von den Curven 4. Ordnung ohne singuläre Punkte, d.h. mit $p = 3$. Da haben wir im Ganzen 6 Typen zu unterscheiden: [Di. 17.2.92]

Wir teilen die Doppeltangenten in solche der ersten und zweiten Art: zur ersten Art gehören diejenigen, welche entweder denselben Curvenzug zweimal berühren oder isolirt verlaufen, zur zweiten Art die anderen, welche zwei verschiedene Curvenzüge berühren (von imaginären Doppeltangenten garnicht zu reden). Da ist denn Zeuthens schöner Satz: dass immer 4 Doppeltangenten der

ersten Art vorhanden sind, dass also in den verschiedenen Fällen

I	II	III	IV	V	VI
bez. 28,	16,	8,	4,	4,	4

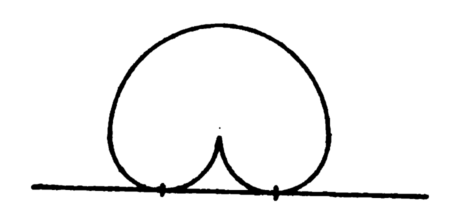
Doppeltangenten reell sind.

b) Uebertragung auf Classencurven.

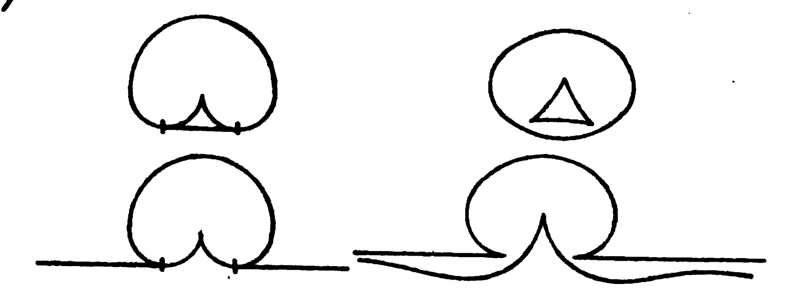
Es ist natürlich nicht schwer, aber doch lehrreich und zu Anfang sogar überraschend, alles das Gesagte auf die Curven zweiter, dritter, vierter Classe zu übertragen. Um hier nur von den Curven dritter Classe zu reden, so werden wir bei ihnen statt des unpaaren Curvenzuges mit drei auf gerader Linie befindlichen Wendungen, der bei der Mehrzahl der Curven dritter Ordnung auftrat, einen Curvenzug mit drei Spitzen haben, die so gegen einander liegen, dass die 3 Spitzentangenten in einem Punkte zusammenlaufen.

Folgendes sind die beiden Typen der Curven dritter Classe mit $p = 1$:

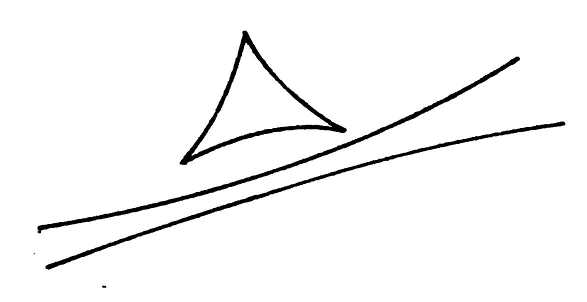
Wir haben dann ferner die Curve 3ter Classe mit nicht isolirter Doppeltangente: ($p = 0$) die sowohl aus dem



zweiteiligen, wie dem einteiligen Typus $p = i$ durch Gränzübergang herausgebracht werden kann, wobei das eine Oval das eine Segment, das andere Oval das andere Segment der Doppelpunkte doppeltzählend aus reellen Stücken der Curvenzüge $p = i$ entstehen:



Um die Curve dritter Classe mit isolirter Doppeltangente herauszubringen, muss man die zweiteilige Curve zuerst so projiciren, dass ihr Oval durch's Unendliche zieht und daher die Gestalt einer Hyperbel annimmt:



und um die beiden Aeste der Hyperbel (die in der Figur schon sehr bei einander gezeichnet sind) vollends zur doppelzählenden Geraden zusammenfallen lassen:

Endlich haben wir die <u>Curve dritter Classe mit Wendetangente</u>, die nach den Plücker'schen Formeln nichts Anderes ist als eine Curve dritter Ordnung mit Spitze.

Sie erscheint als Uebergang zwischen den beiden Arten der Curven 3. Classe mit Doppeltangente:



c. Curven höherer Ordnung und Classe.

Ueber Curven höherer Ordnung und Classe ist nur erst wenig gearbeitet worden.

Bemerkenswert ist der Gedanke, den Franz Meyer 1879 in seiner Münchener Dissertation entwickelt (Anwendung der Topologie auf die rationalen Curven 4. und 5. Ordnung) nämlich die einteiligen rationalen Curven mit $\frac{n-1 \cdot n-2}{2}$ eigentlichen Doppelpunkten nach der Reihenfolge zu classificiren, mit der auf dem reellen Zuge die zweimaligen Durchsetzungen der verschiedenen Doppelpunkte aufeinander folgen:

Im 10ten Bande der math. Annalen */ hat Harnack den Satz bewiesen, daß eine Curve vom Geschlechte p nicht mehr $p+1$ reelle Züge haben kann, daß aber dieses Maximum der Zügezahl auch immer erreicht werden kann. Ersichtlich stimmt das bei den Curven 2ter, 3ter, 4ter Ordnung oder Classe, die wir vorstehend betrachten.

Ebenda veröffentlichte ich dann meine „neue Relation zwischen den Singularitäten," die sozusagen ein Seitenstück zu den Plücker'schen Formeln ist. Sei n die Ordnung, k die Classe der Curve, und spalte man die d Doppelpunkte und t Doppeltan=

*/ 1876.

genten in d' reelle nicht isolirte, d'' reelle isolirte, $2d'''$ imaginäre bez. in t' ———, t'' ———, $2t'''$ ———. andererseits die v Rückkehrpunkte und w Wendetangenten

in v' reelle, $2v''$ imaginäre

bez. in w' ——— $2w''$ ———,

so hat man:

$$n + w' + 2t'' = k + v' + 2d''.$$

In diese Formel ist eingeschlossen, was man über die Realität der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung weiss, nicht minder der Zeuthen'sche Satz von den 4 Doppeltangenten erster Art der C_4: derselbe nimmt hier die bestimmtere Form an:

$$w' + 2t'' = 8$$

Ferner sind da eingeschlossen eine Reihe von Folgerungen über allgemeinere Curven. Nehmen wir z. B. zwei Ordnungscurven n^{ter} Ordnung ohne singuläre Punkte: $\varphi = 0$, $\psi = 0$, die in allgemeiner Lage gegen einander befindlich sein sollen, und betrachten die complexe Curve $\varphi + i\psi = 0$. Mit ihrer conjugirten zusammen bildet dieselbe eine reelle Curve: $\varphi^2 + \psi^2 = 0$ von der Ordnung $2n$ und der Classe $2n(n-1)$, mit einer gewissen Zahl reeller, isolirter Doppelpunkte (d''), welche einfache isolirte Punkte der

Curve $\varphi + i\psi = 0$ sind, und einer gewissen Zahl (t'') reeller, isolirter Doppeltangenten (welche einfache, isolirte Tangenten von $\varphi + i\psi = 0$ sind). Da hat man denn

$$2n + 2t'' = 2n(n-1) + 2d''$$

oder

$$t'' - d'' = n(n-2).$$

Dies ist ein merkwürdiger auf $\varphi + i\psi = 0$ bezüglicher Satz: in der Tat wird man über die einzelnen Zahlen t'', d'' nichts Allgemeines aussagen können. –

Hieran schliesst sich dann die Arbeit von Brill in Ann. 16. (1879). Dass man den Einfluss höherer Singularitäten auf die Plücker'schen Formeln zweckmässigerweise so formulirt, dass man von einer bestimmten Zahl von Doppelpunkten, Spitzen, Doppeltangenten und Wendetangenten redet, welche in die Singularität zusammengerückt sind, wurde von Cayley schon vor langer Zeit ausgeführt und ist seitdem mannigfach erläutert worden, wie wir hier nicht weiter darlegen können. Brill untersucht nun, mit welcher charakteristischen Zahl eine beliebige höhere Singularität in die Relation $n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''$ eingeht (Realitäts-Index der Singularität). Ausserdem formulirt er für die rationalen Curven ($p = 0$) einen algebraischen Beweis meiner Formel (die ich

selbst nur durch geometrische Continuitätsbetrachtungen abgeleitet hatte); dieser Beweis ist später von <u>Franz Meyer</u> weiter verfolgt worden (Göttinger Nachrichten von 1888; Math. Annalen 38, 1890). Franz Meyer hat denn auch später erläutert, wie sich die Formel auf Raumcurven ausdehnt, bez. warum sie sich eigentlich auf Raumcurven ausdehnen läßt (Göttinger Nachrichten 1891). –

Dies dürfte ziemlich Alles sein, was bis jetzt über die reellen Gestalten der höheren, ebenen Curven bekannt ist; wir schreiten jetzt dazu, die zugehörigen, complexen Elemente in Betracht zu ziehen. –

<u>d). Die zu den Curven gehörigen Riemann'schen Flächen</u>, – ich meine damit die „neuen" Riemann'schen Flächen, welche ich 1874 in Bd. 7 der Annalen einführte und dann 1876 in Bd. 10 einer näheren Untersuchung unterwarf. Ich darf zufügen, daß diese Flächen, trotz der theoretischen Wichtigkeit, welche dieselben zu besitzen scheinen, bisher nur ~~in den~~ beiden von mir veranlaßten Dissertationen des Weiteren untersucht worden sind:

<u>Harnack</u>, Verwertung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades. Math. Ann. 9, 1874-75,

Haskell, Ueber die zur Curve vierter Classe $\lambda^3\mu+\mu^3\nu+\nu^3\lambda=0$ im projectiven Sinne zugehörige, mehrfache Ueberdeckung der Ebene, American Journal XIII, 1891. —

Der Gedanke bei der Einführung dieser „neuen" Flächen ist der, nicht nach dem Orte der complexen *Punkte* einer Curve zu fragen, — denn der complexe Punkt wird nach v. Staudt durch eine reelle Gerade [mit Involution u. Sinn] gedeutet und man müsste also das Nebeneinander von ∞^2 geraden Linien zu erfassen suchen, was nicht unmöglich, aber doch unbequem ist —, sondern nach dem Orte der complexen *Tangenten. Indem wir jeder complexen Tangente, wie auch jeder reellen Tangente der Curve einen bestimmten Punkt zuordnen, bekommen wir ein Nebeneinander von Punkten, eine bestimmte, vielleicht mehrfache Ueberdeckung der Ebene, welche direct als eine Riemann'sche Fläche des durch die Curvengleichung dargestellten algebraischen Gebildes angesehen werden kann.* Am klarsten wird das, wenn wir die beiden einfachsten Beispiele betrachten: den Fall des einteiligen Kegelschnitts und den Fall der zweiteiligen Curve 3ter Classe.

Beim einteiligen Kegelschnitt wird man von jedem Punkte des Innern 2 imaginäre Tangenten an die Curve

legen können, von jedem Punkte der Curve selbst eine reelle Tangente. Dementsprechend denken wir uns das Innere zweifach, den Rand einfach mit Punkten der Riemann'schen Fläche besetzt. *Die Riemann'sche Fläche überdeckt das Innere der Ellipse mit 2 Blättern, die längs des Randes wie vermöge einer Falte aneinandergefügt sind.* Anders ausgesprochen: *sie hat die Gestalt eines ganz flachgedrückten Ellipsoids, dessen scheinbarer Umriss unsere Curve ist.* Dass dies die richtige Darstellung ist, geht auch daraus hervor, dass der reelle Punkt des Inneren unserer Curve, jenachdem er die eine oder die andere der durch ihn hindurchlaufenden complexen Tangenten vorstellen soll, im Staudt'schen Sinne mit dem einen oder andern Sinne ausgestattet werden muss; in der Tat entspricht dies dem, dass wir den Punkt einmal der Vorderseite des vorderen Blattes, das andere Mal der Rückseite des hinteren Blattes unserer Riemann'schen Fläche zurechnen. – Und nun bemerken wir, dass unser „Ellipsoid" (um diesen Ausdruck noch einmal zu gebrauchen) in der Tat den (aussergewöhnlichen) Zusammenhang 0 besitzt, so dass der Kegelschnitt zum Geschlechte 0 gehört, wie es sein muss. – Bei der zweiteiligen Curve dritter Classe giebt's bei ganz entsprechendem

Ansatze eine Ringfläche $p=1$, wie dies durch die Figur wohl hinreichend deutlich erläutert wird. (Vorder- und Rückseite des schraffirten Raumes sind wieder längs der reellen Curvenzüge, die selbst nur einfach überdeckt sind, zu einer geschlossenen Fläche zusammengefügt.).

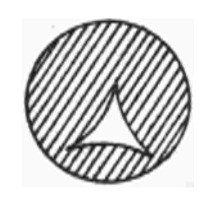
Man beachte noch: die Fläche zieht sich mit einem Doppelblatt an den reellen Curvenzug immer von der <u>concaven Seite</u> heran. Das ist offenbar ein allgemeines Gesetz. In der Eigenart der hiermit eingeführten „neuen" Riemann'schen Flächen werden wir einen tieferen Einblick gewinnen, wenn wir jetzt die sämtlichen Arten von Curven dritter Classe, die wir eben aufführten, sowie insbesondere die zwischen den verschiedenen Arten bestehenden Uebergänge in Betracht ziehen wollen.

<u>Die einteilige Curve 3. Classe mit $p=1$</u> bedarf in dieser [So. 20.2.9.] Hinsicht kaum der Erläuterung. Zeichnen wir dieselbe wie auf p. 248, so zieht sich die Fläche vom reellen Curvenzuge aus mit ihrem Doppelblatt in's Unendliche:

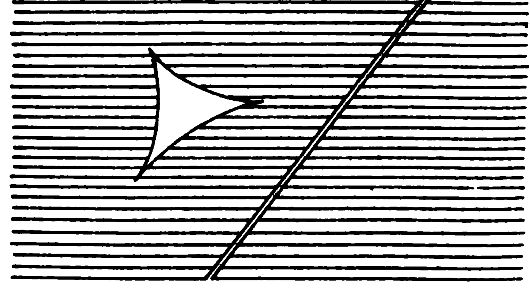
und wir haben in der Tat eine (im Unendlichen geschlossene) Fläche vor uns, die genau so, wie etwa das ein=

schalige Hyperboloid, die Zusammenhangszahl 2 besitzt (nach Schläfli's und meiner Zählung), d. h. zum Geschlechte $p = 1$ gehört.

Ebenso ist die Fläche der Curve 3ter Classe mit nicht isolirter Doppeltangente ohne Weiteres eine Fläche vom Geschlechte $p = 0$:, wobei besonders schön ist, zu sehen, wie diese Fläche $p = 0$ sich entsprechend den auf p 249 gegebenen Figuren als Uebergangsfall zwischen zwei Flächen vom Geschlechte 1 einordnet:

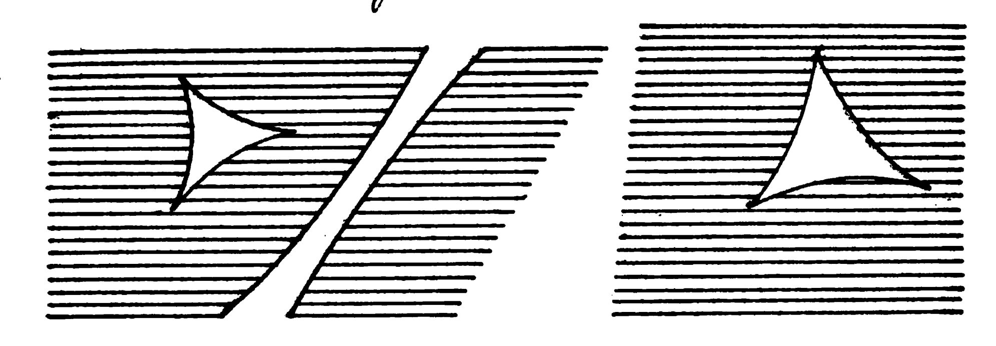


Dagegen giebt die Curve dritter Classe mit isolirter Doppeltangente zu längerer Erläuterung Anlass. Indem wir an die Figur von p 250 anknüpfen, erhalten wir offenbar eine Fläche,



welcher die isolirte Doppeltangente nach ihrer ganzen Erstreckung angehört: Dieselbe ist aufzufassen als

Uebergang zwischen der Fläche einer einteiligen und einer nullteiligen Curve:



und wird dementsprechend wohl am besten so gedacht, daß man sich dieselbe (im oberen und unteren Blatt) entlang der isolirten Doppeltangente zerschnitten denkt, worauf man längs der Schnittlinien die Blätter je nach Bedürfnis entweder so aneinander heften kann, wie es bei der zweiteiligen Curve geschieht, oder so, wie es bei der einteiligen Curve der Fall ist. Bei dieser Zerschneidung wird, weil es sich um die Anbringung eines „Rückkehrschnittes" handelt, die Zusammenhangszahl der Fläche nicht geändert. Die Zusammenhangszahl unserer Fläche ist also nach wie vor = 2, während doch das p unserer Curve auf 0 gesunken sein soll! Wie ist das zu verstehen? Die Sache ist die, daß unsere Fläche im vorliegenden Falle auf die ideale Riemann'sche Fläche, die in der Tat $p = 0$ besitzt,

nicht ausnahmslos eindeutig bezogen ist. Vielmehr entsprechen der isolirten Doppeltangente, welche über unserer Fläche als Curve hinläuft, auf letzterer nur zwei Stellen! Wollen wir eindeutige Beziehung haben, so mögen wir unsere Fläche, wie wir ohnehin gerade verabredeten, längs der Doppeltangente zerschneiden, während wir gleichzeitig die ideale Fläche an den genannten zwei Stellen mit 2 Oeffnungen versehen.

Die beiden "berandeten" Flächen, welche wir so erhalten, sind dann in der Tat ein-eindeutig bezogen (wobei es interessant ist, zuzusehen, welche Uferstrecken unserer Fläche der Umgebung der einzelnen auf der idealen Fläche angebrachten Oeffnung entsprechen). Und in der Tat bieten beide Flächen jetzt die Zusammenhangszahl 2 dar: denn es ist bekannt, dass Anbringung einer Punktirung die Zusammenhangszahl einer Fläche immer um 1 erhöht. Hiernach ist nicht nur nicht paradox, dass unsere Fläche die Zahl 2 aufweist, sondern umgekehrt werden wir sagen müssen: eben in dem Umstande, dass sie die Zusammenhangszahl 2 besitzt, erkennen wir mit Rücksicht darauf, dass die isolirte Doppeltangente nach ihrer ganzen Erstreckung

der Fläche angehört, daß p zu 0 geworden sind.

Was endlich die Curve dritter Classe mit Wendetangenten angeht, so haben wir folgende Figur als Uebergang zwischen 2 Flächen, die zu den beiden auf p 250 gezeichneten Curven mit Doppeltangente gehört.

Wie sollen wir diese neue Fläche auffassen? Wir können uns gerne denken, daß man dieselbe längs der Wendetangente aufschneiden soll. Andererseits wollen wir in der idealen Fläche an der einen Stelle, die der Wendetangente entspricht eine Oeffnung machen. Und indem wir die beiden Flächen dann als eindeutig aufeinander bezogen ansehen, werden wir sagen, daß die Zusammenhangszahl unserer Fläche mit Wendetangente = 1 gesetzt werden soll. Es ist das aber nicht sowohl ein Satz als eine Verabredung. –

c. Die neuen Riemann'schen Flächen bei einer beliebigen reellen ebenen Curve mit einfachen Plücker'schen Singularitäten.

Wir werden uns da eine doppelte Aufgabe stellen können. Indem wir an die Aufzählung der Singularitäten anknüp-

fen, wie sie auf p 251 gegeben ist, werden wir vor allen Dingen verlangen zu erfahren, welche Bedeutung die einzelne Singularitätenform für unsere Fläche besitzt, – dann aber wünschen, die Zusammenhangszahl unserer Fläche abzuzählen. Indem wir die letztere "$2p + w + 2t$" setzen, soll dann die solcherweise definirte Zahl p gleich dem von der gewöhnlichen Theorie angegebenen Ausdrucke $\frac{k-1 . k-2}{2} - t - w$ werden. – Sei es bei den hierauf bezüglichen Erläuterungen gestattet die Anzahlen d', d'' … zugleich als Benennungen der einzelnen Singularitäten zu benutzen, sodass also ein Doppelpunkt d' ein Doppelpunkt ist, welcher zur Kategorie der d' Doppelpunkte, i. e. der reellen, nicht isolirten Doppelpunkte zählt. – Da ist nun zur ersten Fragestellung vielleicht Folgendes zu bemerken.

1). Die Singularitäten d' r', t' haben für unsere Flächen keine andere Bedeutung, als diejenige, die sie für die reellen Züge der Curve besitzen.

2). Die Singularitäten t, w werden für unsere Flächen ganz allgemein die Rolle spielen, die ihnen eben bei den Curven dritter Classe zukam.

3). Die Doppelpunkte d' sind Doppelverzweigungspunkte unserer Fläche, d. h. solche Stellen, an denen sowohl zwei obere als zwei untere Blätter der Fläche mit einander verzweigt sind

4). *Die reellen Punkte der Doppeltangenten $2t'''$ sind aufzufassen als Stellen, an denen zwei Doppelpunkte d'' zusammenrücken.* In der Tat, wenn eine Curve der Klasse k zwei complexe Doppeltangenten erhält (also $2t'''$ um 2 wächst), so sinkt die Ordnung um 4 Einheiten, und das wird, da doch die Relation $n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''$ aufrecht erhalten bleiben muss, durch eine Abnahme von d'' um 2 Einheiten ausgeglichen. Die beiden Doppelverzweigungspunkte, die in den 2 Stellen d'' gelegen sind, compensiren sich dabei gerade, *sodass in dem reellen Punkte zweier complex-conjugirter Doppeltangenten unsere Fläche keinerlei Verzweigung mehr darbietet.*

5). *Die reellen Punkte zweier conjugirt imaginärer Wendetangenten ($2w''$) sind aufzufassen als Stellen, an denen drei Doppelpunkte d''' zusammenrücken.* (Stimmt wieder mit unserer Relation.) *Sie sind daraufhin selber Doppelverzweigungspunkte unserer Fläche*, von den Verzweigungen, welche die drei Punkte d''' mit sich bringen, werden sich nämlich 2 compensiren. —

Ich habe mich von der Richtigkeit dieser Regeln überzeugt, indem ich Beispiele von hinreichender Allgemeinheit in Betracht zog. So behandelte ich in Anm. 10 die Flächen, welche zu den Curven 3. Ordnung

gehören (die ja zur 6ten Classe gehören und also schon zu ziemlich complicirten Flächen Anlass geben), ferner den Uebergang von Curven 4. Classe in Aggregate zweier Kegelschnitte etc. etc. –

Was nun die Abzählung des Zusammenhangs unserer Fläche angeht (die ich ebenfalls in Annalen X allgemein erledigte), so wollen wir uns hier auf gerade K beschränken und mit einer allgemeinen Classencurve beginnen.

$$n = K.K-1,\ t=0,\ w=0$$

welche keinen reellen Zug hat. (Dass es bei geraden K solche reelle Curven giebt, erläutern wir hier nicht weiter, es wird übrigens im Sommersemester bei den dann zu gebenden Realitätsbetrachtungen völlig entwickelt werden). Da haben wir denn über die ganze Ebene hinerstreckt K Blätter, d.h. $\frac{K}{2}$ Doppelblätter, welche durch d'' Doppelverzweigungspunkte zusammenhängen, wo d'' vermöge unserer Relation:

$$d'' = n - K = K.\frac{(K-2)}{2}$$

Dies giebt aber als Zusammenhangszahl auf Grund der bei den gewöhnlichen Riemann'schen Flächen üblichen Zählweise: $-2.\frac{(K)}{2}+2+K.\frac{K-2}{2} = \frac{K^2-3K+2}{2}$, und wenn wir diese Zahl $= 2p$ setzen, so ist

$$p = \frac{K-1.K-2}{2},\ \text{wie es sein soll.} –$$

der der hiermit betrachteten Curve lasse man nun durch allmähliche Umänderung der Coëfficienten irgendwelche reelle Curve K ter Classe mit einfachen Plücker'schen Singularitäten entstehen, wobei man den Uebergang so einrichtet, dass man immer nur durch Curven mit einfachen Plücker'schen Singularitäten hindurchgeht. Da werden dann zuerst vielleicht complexe Doppeltangenten $2t'''$ oder complexe Wendetangenten $2w''$ entstehen. Ferner können isolirte reelle Doppeltangenten (t'') auftreten und sich in reelle Curvenzüge zerspalten. Der reelle Curvenzug kann einen Doppelpunkt d' und 2 Spitzen x' erhalten, indem ein Doppelpunkt d'' an ihn heranrückt.

Durch Vereinigung zweier reeller Curvenzüge kann eine Doppeltangente t' entstehen. Endlich kann in der bei der Curve 3. Classe betrachteten Weise eine Wendetangente w' hervorkommen. Jede einzelne dieser Aenderungen hat einen Einfluss auf die Zusammenhangszahl unserer Fläche, den wir ohne Weiteres anzugeben vermögen. Wir finden so als Zusammenhangszahl: $(K-1)(K-2)-2t-2t'''-w'-2w''$. Dies nun

setzen wir $= 2p + w' + 2t''$ und finden so für p, das Geschlecht der idealen Riemann'schen Fläche,
$p = \frac{K-1 \cdot K-2}{2} - t - w$, wie es sein soll.

[Abr: 24.2.92.]

f). Beziehungen zur Gauss'schen $(x+iy)$ Ebene und zur gewöhnlichen ebenen Riemann'schen Fläche.

Wir betrachten jetzt diejenige Fläche, welche im Sinne unserer Verabredung einem einzelnen complexen Punkte zugeordnet ist. Man erinnere sich, dass der complexe Punkt mit seinem conjugirten Punkte zusammen auf einer reellen Geraden liegt. Von allen reellen Punkten der Ebene aus, die dieser Geraden nicht angehören, geht immer ein complexer Strahl nach unserem Punkte hin.

Unsere Fläche wird daher in einer einfachen Ueberdeckung der ganzen Ebene bestehen, für welche der reelle Strahl eine Randcurve vorstellt. Man vergleiche die nebenstehende Figur in welcher wir durch beigesetzte Pfeile angedeutet haben, dass wenn die linke Seite unserer Fläche vielleicht der Vorderseite der Ebene angehört,

die rechte Seite der Rückseite angehört. – Unsere Fläche ist ersichtlich einfach zusammenhängend und auf die ideale Fläche der complexen Punktes (der vom complexen Punkte auslaufenden Strahlbüschel) erst dann ein-eindeutig bezogen, wenn man diese ideale Fläche mit einer punktförmigen Oeffnung versieht. Wollen wir jetzt den complexen Punkt, zu welchen wir die Fläche hinzuconstruiren, insbesondere in den einen der beiden Kreispunkte der Ebene (sagen wir: K,) verlegen. Die reelle Gerade, die den Rand unserer Fläche angiebt, fällt dann in die unendlich ferne Gerade, und da doch die ganze gerade Linie nur *einem* Punkte der Idealfläche entsprechen soll, so haben wir jetzt eine Ueberdeckung der Ebene vor uns, genau wie die gewöhnliche Theorie von x + iy voraussetzt, nämlich eine *einseitige* Ueberdeckung der Ebene, *bei welcher wir das Unendlich Weite als Aequivalent eines Punktes betrachten.* Aber ich behaupte, daß die Uebereinstimmung eine noch viel innigere ist, *daß wir hier geradezu von unseren Festsetzungen aus die gewöhnliche (x+iy) Ebene erzeugt haben.* Daß heißt natürlich, daß jetzt der reelle Punkt der Ebene einen durch den Kreispunkt K, gehenden Strahl vorstellt, dem wir gerade diejenige

setzen wir $= 2p + w' + 2t''$ und finden so für p, das Geschlecht der idealen Riemann'schen Fläche,

$$p = \frac{(K-1)(K-2)}{2} - t - w,$$ wie es sein soll.

[Mi: 24.2.92.]

f). Beziehungen zur Gauss'schen $(x+iy)$ Ebene und zur gewöhnlichen ebenen Riemann'schen Fläche.

Wir betrachten jetzt diejenige Fläche, welche im Sinne unserer Verabredung einem einzelnen complexen Punkte zugeordnet ist. Man erinnere sich, dass der complexe Punkt mit seinem conjugirten Punkte zusammen auf einer reellen Geraden liegt. Von allen reellen Punkten der Ebene aus, die dieser Geraden nicht angehören, geht immer ein complexer Strahl nach unserem Punkte hin.

Unsere Fläche wird daher in einer einfachen Ueberdeckung der ganzen Ebene bestehen, für welche der reelle Strahl eine Randcurve vorstellt. Man vergleiche die nebenstehende Figur in welcher wir durch beigesetzte Pfeile angedeutet haben, dass wenn die linke Seite unserer Fläche vielleicht der Vorderseite der Ebene angehört,

die rechte Seite der Rückseite angehört. – Unsere Fläche ist wirklich einfach zusammenhängend und auf die ideale Fläche des complexen Punctes (des vom complexen Puncte auslaufenden Strahlbüschels") erst dann ein-eindeutig bezogen, wenn man diese ideale Fläche mit einer punctförmigen Oeffnung versieht. Wollen wir jetzt den complexen Punct, zu welchem wir die Fläche hinzuconstruiren, insbesondere in den einen der beiden Kreispuncte der Ebene (sagen wir: K_1) verlegen. Die reelle Gerade, die den Rand unserer Fläche angiebt, fällt dann in die unendlich ferne Gerade, und da dort die ganze gerade Linie nur *einem* Puncte der Idealfläche entsprechen soll, so haben wir jetzt eine Ueberdeckung der Ebene vor uns, genau wie die gewöhnliche Theorie von $x+iy$ voraussetzt, nämlich eine *einseitige* Ueberdeckung der Ebene, *bei welcher wir das Unendlich Weite als Aequivalent eines Punctes betrachten*. Aber ich behaupte, dass die Uebereinstimmung eine noch viel innigere ist, *dass wir hier geradezu von unseren Festsetzungen aus die gewöhnliche $(x+iy)$ Ebene erzeugt haben*. Das heisst natürlich, dass jetzt der reelle Punct der Ebene einen durch den Kreispunct K_1 gehenden Strahl vorstellt, dem wir gerade diejenige

complexe Grösse als Parameter beilegen können, die wir bei der gewöhnlichen Interpretation von $(x+iy)$ durch den reellen Punkt versinnlichen. In der Tat, der Punkt (a, b), durch den wir der gewöhnlichen Deutung zufolge die complexe Grösse $(a+ib)$ interpretiren, ist gerade der reelle Punkt des durch K_1 gehenden Strahles: $x+iy=a+ib$.

So ordnet sich also die Gaussische Ebene als specieller Fall unter unsere „neuen" Riemann'schen Flächen ein, sie ist einfach die Fläche des Kreispunktes K_1. Aber auch die gewöhnlichen über der Gaussischen Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Flächen können wir mit der Construction unserer „neuen" Flächen in Verbindung setzen. Ich will der Kürze halber unsere Flächen, die doch der reellen Curve in einer durch reelle Projectivitäten unzerstörbaren Weise zugeordnet sind, als „projektive" Flächen bezeichnen, und nun zu einer Curve $f(x, y)=0$ in einer neuen Weise durch <u>metrische</u> Constructionen eine Riemann'sche Fläche construiren, die weiterhin zur gewöhnlichen Riemann'schen Fläche über der $(x+iy)$ Ebene in einfachster Beziehung stehen soll. Wir coordiniren nämlich zunächst jedem Punkte x, y von $f(x, y)=0$

der durch ihn gehenden von K_1 gehenden Strahl. Da jeder Strahl des von K_1 auslaufenden Büschels unsere Curve in n Punkten schneidet (unter n, allgemein zu reden die Ordnung von $f(x,y)=0$ verstanden), so erhalten wir als Bild von $f(x,y)=0$ das n-fach gezählte Büschel: es ist das nichts Anderes, als wir sonst Beziehung der Curve $f(x,y)=0$ auf einen n-fach überdeckten R_1 genannt haben.

Jetzt ersetzen wir jeden Strahl durch seinen reellen Punkt, den n-fach gezählten Strahl durch n an der betreffenden Stelle übereinanderliegende Punkte. So haben wir als Riemann'sche Fläche die n-fach überdeckte Curve. Verzweigungspunkte der Fläche liegen an den Stellen, von denen aus Tangenten an die Curve gehen, die durch K_1 laufen, also, wenn $f(x,y)=0$ reell ist, an denjenigen Stellen, von denen ebensowohl aus Tangenten an die Curve gehen, die durch den zweiten Kreispunkt K_2 laufen. Das sind, der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Geometer zufolge, die <u>Brennpunkte</u> der Curve $f(x,y)=0$.

Welches ist nun die Beziehung dieser „metrischen" Fläche zur gewöhnlichen „Riemann'schen Fläche? Unsere Fläche erwächst, indem man jedem reellen oder imaginären Wertsystem (x,y), welches $f(x,y)=0$ befriedigt,

den Punkt $(x+iy)$ coordinirt, die gewöhnliche Fläche, indem man jedem Werte von $z = x+iy$, welcher bei der Gleichung $F(s, z) = 0$ betrachtet werden mag, den Punkt $(x+iy)$ entsprechen läßt. Beide Festsetzungen kommen ersichtlich zur Uebereinstimmung, sobald man setzt:

$$z = x+iy, \; s = x - iy, \text{ d.h. } x = \frac{z+s}{2}, \; y = \frac{z-s}{2i},$$
$$F(s, z) = f(x, y).$$

Wir können also sagen, daß die gewöhnliche Fläche von unserer metrischen Fläche nicht eigentlich verschieden ist: wir müssen nur, ehe wir die letzte construiren, $F(s, z)$ in $f(x, y)$ umsetzen. So ist denn die gewöhnliche Riemann'sche Fläche über der z-Ebene ebenfalls mit unserer projectiven Construction in Verbindung gesetzt. Sie erscheint dabei wohlverstanden nicht als ein specieller Fall der projectiven Fläche (wie es die Gauss'sche Ebene tut), vielmehr tritt ja als neues Moment für unsere Construction die Beziehung der Punkte von $f(x, y) = 0$ auf die durch K hindurchlaufenden Strahlen hinzu.

Wollen wir beide Flächen, die „metrische" und die „projective" coordiniren, so müssen wir sie beide als Specialfälle einer allgemeinen Fläche ansehen. Man erhält die letztere ersichtlich folgendermaßen

Neben die Curve $n$ter Ordnung $f(x,y)=0$ stellen wir die Curve Kter Classe $\varphi(u,v)=0$ und beziehen nun jeden Punkt (x,y) auf f auf jede durch ihn hindurchgehende Tangente von φ. Nun construiren wir, indem wir jede Tangente von φ durch ihren reellen Punkt ersetzen, die zu φ gehörige, projective Fläche, und überdecken dann diese Fläche den n Schnittpunkten entsprechend, welche die einzelne Tangente mit $f=0$ gemein hat, n-fach. Wir haben die projective Fläche von $\varphi=0$ in einfacher Ueberdeckung, sobald wir $n=1$ nehmen, die metrische Fläche von $f=0$ (natürlich in projectiver Verallgemeinerung), sobald wir $K'=1$ nehmen. Es scheint interessant, sich mit dieser neuen Fläche eingehender zu beschäftigen.

Was ist ihr p? Kann dieselbe bei besonderer gegenseitiger Lage von $f=0$ und $\varphi=0$ reducibel werden? Kann man die n-fache Ueberdeckung der zu $\varphi=0$ gehörigen, projectiven Fläche beliebig annehmen? [Uebertragung des bei den ebenen Flächen wohlbekannten Riemann'schen Existenztheorems]

g) Functionen auf der projectiven Fläche.

Wir hatten bislang unsere projective Fläche nur dazu benutzt, um das p der zugehörigen Curve abzuzählen. Aber es ist klar, daß wir ebensowohl auf ihr den

Verlauf irgend welcher zu den Curvenpuncten gehörigen Function studiren können, und wir nutzen die unmittelbare Beziehung, welche zwischen unserer Fläche und dem Verlauf der Curve besteht, erst vollends aus, wenn wir dies an einzelnen Beispielen wirklich ausführen. Ich darf in Bezug hierauf auf meine Arbeiten in Bd. 7 und 10 der Annalen verweisen. In Bd. 7 untersuche ich beispielsweise den Verlauf des überall endlichen elliptischen Integrals $w = u + iv$ bei den zweiteiligen Curven dritter Classe, und zeige, dass die Curven u = Const. auf der projectiven Fläche einfach durch die geradlinigen Tangenten des dreispitzigen Curvenzuges ausgeschnitten werden, während die Curven v = Const. ovale Gestalt haben:

Curven u = Const. Curven v = Const.

Harnack hat das in Ann. 9 einzelner verfolgt. – In Bd. 10 studire ich sodann in analoger Weise den Verlauf der überall endlichen Integrale an der Curve 4ter Classe vom Geschlechte 3: ich leite daraus für diese Curven eine Reihe von Realitätstheoremen ab, die wir in dieser Vorlesung erst im Sommersemester werden besprechen können,

wo wir im Besitz des Abel'schen Theorems sind.

Hier wollen wir einen anderen Punkt erläutern. Als wir zu Anfang des Semesters auf den gewöhnlichen (ebenen oder nicht ebenen) Riemann'schen Flächen complexe Functionen, oder vielmehr zunächst Potentiale definirten, geschah das durch die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial q} - G\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}}}{\partial q} = 0$$

die als Covariante der das Bogenelement definirenden Differentialausdruckes

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

anzusehen war, oder auch, da ein gemeinsamer Factor von E, F, G in der partiellen Differentialgleichung wegfällt, als Covariante der Differentialgleichung:

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2 = 0,$$

durch welche die auf der Fläche verlaufenden Minimalcurven definirt werden. Für die gewöhnliche ebene R. Fläche wird diese Differentialgleichung

$$dx^2 + dy^2 = 0$$

und stellt die durch die Kreispunkte gehenden Geraden vor. Nun lernten wir doch eben, daß die Beziehung zwischen der gewöhnlichen ebenen Riemann'schen Fläche und unserer

projectiven Fläche die ist, daß den durch K_1 (oder K_2) laufenden Geraden dort die geradlinigen Tangenten der Curve hier entsprechend gesetzt werden. Wir schließen daraus folgendes:

<u>Bei der projectiven Fläche tritt an die Stelle der Differentialgleichung $E dp^2 + 2 F dp\, dq + G dq^2 = 0$ in jedem einzelnen Blatte diejenige Differentialgleichung 2ten Grades, welche die beiden von dem gerade betrachteten Punkte auslaufenden imaginären Curventangenten vorstellt, die zu unserem Blatte bez. dem conjugirten Blatte zugehören.</u> Ist also vielleicht $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ die Classengleichung unserer Curve, so setze man zunächst, um die sämmtlichen vom Punkte (x_1, x_2, x_3) auslaufenden Tangenten zu haben:

$$u_1 = x_2\, dx_3 - x_3\, dx_2$$
$$u_2 = x_3\, dx_1 - x_1\, dx_3$$
$$u_3 = x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1.$$

oder auch, um kein überflüssiger Differential zu haben, indem man $dx_3 = 0$ nimmt:

$$u_1 = -x_3\, dx_2$$
$$u_2 = x_3\, dx_1$$
$$u_3 = x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1.$$

Die entstehende Gleichung

$$\varphi(-x_3 dx_2,\ x_3 dx_1,\ x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = 0,$$

die in dx_1, dx_2 homogen vom $k$ten Grade ist,

spalte man jetzt, soweit sie sich im Reellen spalten läßt, in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades. Zu jedem Blatte unserer projectiven Fläche zusammen mit dem ihm conjugirten Blatte wird ein nicht weiter spaltbarer quadratischer Faktor zugehören, und dieser Faktor gleich Null gesetzt wird uns die Differentialgleichung zweiten Grades liefern, welche zwecks Definition der auf der Fläche verlaufenden Potentiale und Functionen an Stelle der Gleichung $E\,dp^2 + 2\,F\,dp\,dq + G\,dq^2 = 0$ zu setzen ist.

Dabei tritt dann die interessante Tatsache auf, daß die linke Seite der quadratischen Gleichung aufhört, eine definite quadratische Form zu sein, sobald wir an einen reellen Curvenzug bez. eine reelle Wendetangente, oder eine reelle isolirte Doppeltangente herankommen.

h. Fernere Bedeutung der reellen Curvenzüge für unsere Fläche

Wir werden noch eine letzte Betrachtung an unsere projectiven Flächen anknüpfen. Wodurch unterscheiden sich die Flächen reeller Curven von denjenigen complexer Curven? Dadurch daß sie symmetrisch gebaut sind, daß sie in sich selbst übergehen, wenn man Vorderseite und Rückseite der Fläche mit einander vertauscht, oder, wie man kurz sagen kann: wenn man

die Fläche an der tragenden Ebene spiegelt:

Die reellen Curvenzüge sind dabei solche Curven, die bei der Spiegelung völlig ungeändert bleiben, d.h. die bei der Spiegelung mit allen ihren Punkten fest-bleiben.

Diese Spiegelung ist nun offenbar im Sinne der gerade definirten Differentialgleichung eine „conforme Abbildung" der Fläche auf sich selbst, nur eine solche, bei welcher „Umlegung der Winkel" statt hat. Die „Periode dieser conformen Abbildung ist natürlich 2, d.h. sie führt, zweimal angewandt, zur Identität zurück.

Wir haben damit einen Ansatz, dessen Allgemeingültigkeit leicht allgemein nachzuweisen ist, den wir aber erst im Sommersemester näher verfolgen wollen. Es wird sich darum handeln überhaupt symmetrische Riemann'sche Flächen in Betracht zu ziehen, d.h. solche, welche durch eine conforme Abbildung zweiter Art von der Periode zwei in sich übergeführt werden.

Dieselben entsprechen, wie man zeigen kann, ganz allgemein den reellen Curven, mögen diese Curven im R_2 oder in irgend welchem anderen Raume gelegen sein. Und insbesondere entsprechen die reellen Curvenzüge der reellen Curve denjenigen Curven der

symmetrischen Flächen, die bei der symmetrischen Umformung punktweise festbleiben und daher zur Umformung gehörige Symmetrielinien genannt werden können.
Unser Zielpunkt wird darauf hinaus sein, eine allgemeine Theorie der reellen Curven und insbesondere ihrer reellen Züge für einen beliebig ausgedehnten Raum aus der independent zu entwerfenden Theorie der symmetrischen Flächen abzuleiten. Alles, was wir bislang über die Gestalten reeller, ebener Curven gelernt haben, Alles insbesondere, was wir über die ihnen zugehörigen projectiven Flächen entwickelten, muss sich als specieller Fall unter die allgemeinere hier gemeinte Theorie einordnen.

C). Weitere Verbindung des Plücker'schen Ideenkreises mit der Riemann'schen Theorie [Fr. 27.2.92]

Es handelt sich uns jetzt um die Schnittpunktsätze.
Indem ich mich (insofern es sich hier nur um die allgemeine principielle Auffassung handelt) auf die allereinfachsten Fälle beschränke, werde ich deren Beziehung zum Riemann-Roch'schen Satze darlegen, und von da aus eine nähere „Determination" der Schnittpunktsätze ableiten, die ganz mit den Entwickelungen übereinstimmt, welche Zacharach in seiner Erlanger Dissertation (1881), vergl. auch Ann. 26 (1885) –, für den complicirteren, Cayley'schen Schnittpunktsatz gegeben hat.

d). Formulirung der in Betracht kommenden Schnittpunktsätze.

Wir nehmen $f=0$ als eine Curve n^{ter} Ordnung; singuläre Punkte dürfen vorhanden sein oder auch fehlen; nur sollen dieselben nicht als Schnittpunkte benutzt werden. Jetzt schneiden wir mit einer Curve m^{ter} Ordnung $\varphi=0$ und erhalten $m\,n$ Schnittpunkte. Wie gross ist die Constantenzahl dieses Schnittpunktsystems bei einmal gegebener Curve $f=0$? Und wieviele Bedingungen bestehen also zwischen den $m\,n$ Schnittpunkten? Das ist die ursprüngliche Frage, die sich so beantwortet:

1). Solange $m < n$, geht jedenfalls nur eine Curve m^{ter} Ordnung durch die $m\,n$ Punkte. Eine Curve m^{ter} Ordnung hängt aber überhaupt von $\frac{m(m+3)}{2}$ Constanten ab, was also auch die Constantenzahl des Schnittpunktsystems ist. Hiernach befriedigen die $m\,n$ Punkte

$$m\,n - \frac{m(m+3)}{2} \text{ Bedingungen}$$

2). Ist $m \geq n$, so muss man bedenken, dass neben der Curve $\varphi_m=0$ jede Curve m^{ter} Ordnung $\psi_{m-n} f_n = 0$ durch dieselben Schnittpunkte geht. Hier enthält der Ausdruck ψ $\frac{(m-n+1 \cdot m-n+2)}{2}$ Coefficienten. Ebensoviele der $\frac{m(m+3)}{2}$ Constanten von $\varphi=0$ kann ich also durch geeignete Annahme von ψ zerstören. Demnach

behalte ich $\frac{m.m+3}{2} - \frac{m-n+1.m-n+2}{2}$ Constante im Schnittpunktsystem und habe also zwischen den $m\,n$ Punkten.

$$mn - \frac{m.m+3}{2} + \frac{m-n+1.m-n+2}{2} = \frac{n-1.n-2}{2}$$

Bedingungen.

Die so in den beiden Fällen gefundene Zahl der Bedingungen ist für $m = n-1$ und $m = n-2$ dieselbe Zahl, wir dürfen also die beiden Formeln auch so anwenden, daß wir die Abzählung 1) nur für $m \leqq n-3$ in Anwendung bringen, Formel 2) aber für $m > n-3$. —

Und nun müssen wir die Wendung angeben, welche man den gewonnenen Sätzen zumeist giebt. Dieselbe geht dahin, daß man sich eine hinreichende Zahl von Punkten des Schnittpunktsystems gegeben denkt und dann sagt: die übrigen sind dadurch bestimmt. Also, um es specieller zu sagen, man behauptet

1) für $m \leqq n-3$: Von den $m\,n$ Schnittpunkten sind $mn - \frac{m.m+3}{2}$ durch die anderen festgelegt.

2) für $m > n-3$: Von den $m\,n$ Schnittpunkten sind allemal $\frac{n-1.n-2}{2}$ durch die anderen bestimmt.

Dieses ist natürlich nur im Allgemeinen richtig. Die $m\,n$ Schnittpunkte ergeben mit ihren Coordinaten $m\,n$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten von $\psi = 0$, und wenn man nun zwischen diesen Gleichun-

sagen wir $\frac{n-1.n-2}{2}$ Abhängigkeiten bestehen läßt, so wird aus irgend $mn - \frac{n-1.n-2}{2}$ der linearen Gleichungen der Rest von $\frac{n-1.n-2}{2}$ Gleichungen doch nur dann folgen, wenn nicht ein Teil der linearen Abhängigkeiten sich auf die vorweg genommenen $mn - \frac{n-1.n-2}{2}$ Gleichungen wirft.

Um ein Beispiel zu betrachten: Eine feste C_5 habe mit beweglichen C_2 10 Schnittpunkte gemein; zwischen denen werden dann 5 Abhängigkeiten bestehen. Aber werden darum 5 der Punkte jedesmal durch die 5 anderen bestimmt sein? Nur dann, wenn die letzteren 5 nicht auf einer Geraden liegen. Dann gehen nämlich durch diese 5 Punkte ∞^2 Kegelschnitte (aus der festen Geraden und einer beliebigen hinzutretenden Geraden bestehend), und der Rest des Schnittpunktsystems behält noch eine zweifache Beweglichkeit.

Allgemein werden wir sagen: *Unsere letztformulierten Behauptungen sind nur solange richtig, als durch die vorzugebenden Schnittpunkte nicht mehr Kurven m^{ter} Ordnung hindurchgehen, als man nach der Zahl der Schnittpunkte von vornherein erwarten sollte.*

Die hiermit formulierte Regel wird für große Werte von m unhandlich; da ist es dann nützlich, daß der Riemann-Roch'sche Satz die Bedingung der Gültigkeit der Behauptungen, wie wir sehen werden, gerade auf den

Rest der Schnittpunkte wirft, der durch die vorgegebenen Schnittpunkte bestimmt sein soll.

b) Verbindung mit den Sätzen der Riemann'schen Theorie zunächst in dem Falle, daß $f=0$ keine singulären Punkte hat.

Wollen wir die Verbindung mit Riemann herstellen, so müssen wir in der Tat auseinanderhalten, ob $f=0$ singuläre Punkte hat, oder nicht; über den Fall, wo solche Punkte vorhanden sind, handeln wir erst sogleich unter c). Ist $f=0$ singularitätenfrei, so werden wir die gewünschte Verbindung sofort haben,

indem wir erstens statt der Schnittpunkte von $\varphi=0$ mit $f=0$ die „Formen" $\varphi_m(x_1 x_2 x_3)$ und insbesondere ihre Nullpunkte „auf $f=0$" betrachten; wir werden hier statt $\varphi_m(x_1 x_2 x_3)$ lieber gleich die früher gebrauchte Bezeichnung $\gamma_m(x_1 x_2 x_3)$ gebrauchen, – indem wir uns sodann überzeugen, daß hier die γ_m mit den „algebraischen" ganzen Formen Γ_m identisch sind, (daß also die Curve $f=0$, wie wir es gelegentlich nannten, eine Elementarcurve ist), –

indem wir endlich die Constanten in Γ_m, bez. die Beweglichkeit der verschiedenen auf $f=0$ von uns zu betrachtenden Punktgruppen durch den Riemann-Roch'schen Satz abzählen.

Da müssen wir vor allen Dingen constatiren, daß die sämmtlichen an der Curve $f=0$ hinerstreckbaren überall endlichen Integrale sich in der Form darstellen lassen

$$n' \cdot \frac{\int \varphi_{n-3}(x_1, x_2, x_3) \cdot (c\, x\, dx)}{\Sigma\, c_i f_i}$$

In der That: die Zahl der in φ_{n-3} willkürlichen Coefficienten, nämlich $n-2.n-1$, ist genau gleich dem von anderer Seite bestimmten p der Curve, und p ist andrerseits die Zahl der linear unabhängigen überall endlichen Integrale. Wenn jetzt der Riemann-Roch'sche Satz die „Beweglichkeit" irgendwelcher auf $f=0$ angenommener Gruppe von $m \cdot n$ Punkten zu $mn-p+\tau$ bestimmt, unter τ die Zahl der in den $m \cdot n$ Punkten verschwindenden $d\omega$ verstanden, so können wir fortan unter τ die Zahl der Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung verstehen, welche durch die $m.n$ Punkte hindurchgehen (der Formen φ_{n-3}, welche in den $m\,n$ Punkten verschwinden; zwei Formen, welche sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden, als gleichwertig angesehen). Von hier aus überzeugen wir uns dann leicht, daß es genau so viele Γ_m giebt als γ_m, daß also die Γ_m und γ_m unserer Curve $f=0$ identisch sind. Zwischen den $m\,n$ Nullpunkten von Γ_m haben wir dann aber nach dem Riemann-Roch'schen Satze $p-\tau$ Bedingungen nai

genau die $\frac{n-1 . n-2}{2}$ bez. $m.n - \frac{m . m+3}{2}$ Bedingungen sind, von denen der Schnittpunktsatz redet. Damit haben wir nicht nur den letzteren wiedergewonnen, sondern wir sehen auch weshalb eine Fallunterscheidung zu machen ist, jenachdem $m > n-3$ oder $\leq n-3$ ist: im ersteren Falle ist die Zahl τ der Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung, welche durch die $m\,n$ gehen, notwendig 0, im zweiten ist sie ebenso notwendig > 0.

Und was nun die Behauptung angeht, dass [Bri. 2.3.92] mit einem Teile der Schnittpunkte der Rest mitbestimmt sei, so wollen wir das hier nur für $m > n-3$ prüfen. Da sollen von den $m\,n$ Schnittpunkten $\frac{n-1 . n-2}{2}$ d.h. gerade p, durch die anderen bestimmt sein. Wird dies richtig sein, oder vielmehr: wann wird es zutreffen? Offenbar dann und nur dann, wenn diese p Punkte auf $f = 0$ nicht selbst eine Beweglichkeit haben (mit anderen Gruppen von p Punkten aequivalent sind). Dies tritt wieder nach dem Riemann-Roch'schen Satze vermöge der Identität zwischen den Gleichungen $dw = 0$ und $\varphi_{n-3} = 0$ dann und nur dann ein, wenn durch die p Punkte keine Curve $n-3$. Ordnung geht.

Wir werden noch genauer sagen dürfen:

Die p Punkte sind durch die übrigen mitbestimmt, sofern durch die p Punkte keine Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung

geht, und zwar werden des Genaueren die p Punkte noch eine ν'-fache Beweglichkeit haben, wenn eben τ' Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung durch dieselben hindurchlaufen.

Es wird kaum nötig sein, dies noch durch Beispiele zu belegen oder noch für $m \gtrless n-3$ Entwickelungen hinzuzufügen. —

c). Von dem Falle, wo $f=0$ singuläre Punkte hat, die aber nicht als Schnittpunkte benutzt werden sollen.

Dieser Fall ist wohlbemerkt in der Geometrie besonders wichtig, insbesondere, wenn man extreme Voraussetzungen macht, z. B. dass die Curve $f=0$ in mehrere Curven niederen Grades zerfällt. So hat Plücker seiner Zeit den Pascal'schen Satz folgendermaßen bewiesen.

1, 2, 3, 4, 5, 6 sind Punkte eines Kegelschnittes und es kreuzen sich die Geraden, es wird behauptet, dass — 7, 8, 9 auf gerader Linie liegen!

$$\begin{cases} \overline{1,2} \text{ und } \overline{4,5} \text{ in } 7 \\ \overline{2,3} \text{ und } \overline{5,6} \text{ in } 8 \\ \overline{3,4} \text{ und } \overline{6,1} \text{ in } 9 \end{cases}$$

Zum Beweise betrachte man die 3 Geraden:

$$\overline{12},\ \overline{34},\ \overline{56} \text{ als eine erste } C_3\ (f=0)$$

die 3 Geraden $\overline{23}$, $\overline{45}$, $\overline{61}$ als eine zweite C_3 $(\varphi=0)$. Die beiden C_3 schneiden sich gerade in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Nun ist unser Kegelschnitt, verbunden mit der Geraden 7, 8 eine dritte C_3, welche durch 8.

der genannten Punkte durchgeht, nämlich durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Dieselbe muss also auch durch 9 gehen, und da 9 nicht auf dem Kegelschnitt gelegen sein kann (weil der die Geraden 34 und 61 doch nur je in 3 und 4 bez. 6 und 1 schneiden kann), so muss 9 auf der Verbindungsgeraden von 7 und 8 gelegen sein, was zu beweisen war. –

Für den allgemeinen Beweis der Schnittpunktsätze macht die Ausnahme, dass $f=0$ singuläre Punkte hat, die aber nicht als Schnittpunkte figuriren sollen, wie wir schon bemerkten, gar keine Schwierigkeit: der Beweis bleibt wörtlich derselbe, wie in dem Falle, wo $f=0$ keine Schnittpunkte hat.

Ganz anders ist es aber für die functionentheoretische Betrachtung. Wenn $f=0$, nachdem er vorher keinen Doppelpunkt hatte, einen solchen bekommt, so sinkt sein p um eine Einheit, die Definition der Integrale 1ter Gattung wird eine andere, etc. etc.

Wir haben den ganzen Uebergang schon oben geschildert. Mögen ξ, η die beiden Stellen des Gebildes sein, die sich im Doppelpunkte vereinigen. Dann haben wir oben gesehen:

dass die „freien" algebraischen Functionen ψ/φ, welche wir ursprünglich auf $f=0$ studirt haben mögen, in „gebundene" Functionen übergehen, sobald

der Doppelpunkt entsteht, nämlich in solche, die in ξ und η denselben Wert haben.
daß einer der p ursprünglichen Integrale 1. Gattung $w_1 \dots w_p$ in das Integral 3ter Gattung $P_{\xi\eta}$ übergeht (welches in ξ und η seine Unstetigkeitspunkte liegen hat).
und daß dementsprechend für die „gebundenen" Functionen, die auf der mit Doppelpunkt versehenen $f=0$ existiren, ein „modificirter" Riemann-Roch'scher Satz gilt, in welchem neben den Differentialen erster Gattung dw gleichberechtigt das $dP_{\xi\eta}$ auftritt.
Hiermit ist aber auch schon gesagt, wie so die Schnittpunktsätze bei dem ganzen Uebergange ungeändert erhalten bleiben können. Die Sache ist einfach die, daß die Formen $\varphi_m(x_1 x_2 x_3)$, von denen die Schnittpunktsätze handeln, jetzt zu vergleichen sind mit solchen algebraischen Formen Γ_m, welche entstehen, wenn man die zu $f=0$ gehörigen <u>gebundenen</u> algebraischen Functionen in Zähler und Nenner spaltet. So endet die ganze Discussion darin, daß die Aufforderung entsteht, man soll sich ausführlicher mit den „gebundenen" algebraischen Functionen beschäftigen, die dadurch auf den Riemann'schen Flächen entstehen, daß man sie als Gränz=

fälle Riemann'scher Flächen von höherem p betrachtet. –

d. Von dem Falle, wo $f = 0$ singuläre Punkte hat, die als Schnittpunkte mit $\varphi = 0$ benutzt werden.

Handelt es sich hier um blosse Doppelpunkte von $f = 0$, durch welche $\varphi = 0$ einfach hindurchgeht, so ist die Sache natürlich einfach zu erledigen. Von den $p - \tau$ Relationen, welche im Allgemeinen für die Schnittpunkte einer Curve n^{ter} und m^{ter} Ordnung bestehen werden, wird hier durch jeden Doppelpunkt von f, der als Schnittpunkt figurirt, eine absorbirt werden. (die aussagt, dass in dem Augenblicke, wo ein Schnittpunkt in den Doppelpunkt rückt, deren gleich ein zweiter hineinrückt). Dies ist Alles.

Aber während man zu den Zeiten von Plücker sich mit einer solchen Bemerkung begnügte, hat sich in den letzten 20 Jahren (wohl unter indirecten Einflusse der Weierstrass'schen Schule) immer mehr die Tendenz entwickelt, alle möglichen noch so complicirten Fälle wirklich durchzuarbeiten. Hier wäre denn die Stelle, um ganz besonders von den Nöther'schen Arbeiten, sowie über die Arbeiten von Brill and Nöther zu berichten.

Wir müssen uns leider auf ein ganz kurzes Literaturverzeichniss beschränken.

Zunächst gehören natürlich hierher alle die Arbeiten über den Noether'schen Fundamentalsatz, über die wir schon oben berichteten, d.h. über die Frage, wann man die Gleichung einer Curve in die Gestalt $A f + B \varphi = 0$ setzen kann, unter A, B rationale ganze Formen von x_1, x_2, x_3 verstanden. Dann haben wir im Anschlusse an die Arbeit von Brill und Noether in Ann. 7 (1874), die wir so oft nannten, der Begriffsbestimmung der adjungirten Curven und der für diese geltenden Schnittpunktsätze zu gedenken. Adjungirt heißt eine Curve $\varphi = 0$, wenn der Quotient von φ und der Polaren eines beliebigen Punktes c:

$$\frac{\varphi}{c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}}$$

in jedem singulären Punkte von f endlich bleibt.

Nennt man dann alle Schnittpunkte von $\varphi_m = 0$ mit $f = 0$, die nicht notwendig in die singulären Punkte fallen, bewegliche Schnittpunkte, bezeichnet ferner mit p das Geschlecht der mit ihren singulären Punkten behafteten Curve $f = 0$, endlich mit τ die Zahl der adjungirten C_{n-3}, die durch die beweglichen Schnittpunkte von $f = 0$ mit einer $\varphi_m = 0$ hindurchgehen, so werden für die beweglichen Schnittpunkte gerade $p - \tau$ Bedingungen bestehen.

(Sie werden eben auf $f=0$ eine Vollschaar aequivalenter Punktgruppen bilden, die sich für $m=n-3$ mit der Schaar derjenigen Punktgruppen deckt, die durch $c_1\, dw_1 + \ldots c_p\, dw_p = 0$ dargestellt wird.)

Endlich nennen wir die neuesten Arbeiten von Nöther über die hier vorliegenden Fragen:

Ann. 15. 1879: Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht adjungirten Curven.

Acta 8, 1886: Ueber die reducibelen algebraischen Curven.

Von functionentheoretischer Seite ist die allgemeine, hier vorliegende Problemstellung noch nicht aufgenommen worden; es wäre wohl sehr zu wünschen, daß das geschähe.

e). Schlußbemerkung.

Wollen wir zum Schluß noch hervorheben, daß die Schnittpunktsätze in wechselnder Benennung das ganze Gebiet der algebraischen Curven durchziehen.

Wenn z. B. die Synthetiker davon ausgehen, daß man jede Curve $f=0$ in die Gestalt $\varphi\psi' - \varphi'\psi = 0$ schreiben kann, d. h. als Schnitt der beiden projectiven Curvenbüschel $\varphi - \lambda\psi = 0$, $\varphi' - \lambda\psi' = 0$ construiren kann (Chasles'sche Erzeugungsweise), so liegt dem ein Schnittpunktsatz zu Grunde. Ebenso ist ein Schnittpunktsatz, speciell für die zu $f=0$ adjungirten Curven, der von Brill und

Nöther l.c. sogenannte „Restsatz". Dieser Restsatz ist gar nichts anderes, als der Restsatz, den wir früher betreffs der φ aufstellen [p 166] vorausgesetzt, dass man bewiesen hat, dass die beweglichen Schnittpunkte adjungirter φ_m, wie wir uns eben ausdrückten, jedesmal eine Vollschaar aequivalenter Punktgruppen abgeben. *). –

9. Weiterbildung der Curventheorie über den Plücker'schen Ideenkreis hinaus.

Natürlich reden wir hier nur von ebenen Curven, die Raumcurven bleiben für das Sommersemester.

Wir unterlassen auch, auf die bereits wiederholt genannten Tendenzen zurückzukommen, die sich eine Verschärfung der überkommenen Theoreme zum Ziele setzen, wie wohl dieselben ja eigentlich hier zu rubriciren wären.

---

*) In dem hiermit beendeten Absatze hätte jedenfalls der Bedeutung ausführlicher gedacht werden müssen, welche das in der Theorie der ebenen Curven herrschende Princip der Dualität für die Riemann'sche Theorie besitzen mag. Man kann das Wesentliche in dieser Hinsicht folgendermassen bezeichnen: Vermöge des genannten Princips erscheinen die ∞^2 Punktgruppen, in denen eine ebene Curve n^{ter} Ordnung von den Geraden der Ebene geschnitten wird, coordinirt mit den ∞^2 Gruppen zu je k Punkten, in denen die Curve von den Tangenten berührt wird, die von einem beliebigen Punkte der Ebene auslaufen. Das Princip wäre also jeder $G_n^{(2)}$ der Riemann'schen Fläche eine bestimmte $G_k^{(2)}$ zuzuordnen, und diese beiden Schaaren von Punktgruppen immer nebeneinander zu betrachten.

Es bleibt dann wesentlich Zweierlei zu nennen:

I Die Entstehung der Invariantentheorie (dieses Wort in allgemeinster Bedeutung genommen, sodass nicht nur von Invarianten etc. bei linearen Transformationen, sondern bei beliebigen eindeutigen Transformationen etc. zu handeln sein wird);

II. Die Weiterentwickelung dessen, was man Geometrie auf einer Curve $f=0$ zu nennen pflegt (Gruppenverhältnisse, die bei den merkwürdigen Punkten der Curve auftreten, allgemeiner: Abzählungsmethoden, zur Festlegung der Anzahl irgendwelcher auf $f=0$ interessirender Punkte)

I. Invariantentheorie ebener Curven. [Do. 5.3.92]

a) Invariantentheorie der linearen Substitutionen

In erster Linie müssen wir natürlich davon sprechen, dass man die Grundbegriffe der Theorie: Invariante, Covariante etc. in die Geometrie der Curven eingeführt hat, wobei sich dann zeigte, dass eine Curve n^{ter} Ordnung für $n>2$ $\frac{n(n+3)}{2}-8$ unabhängige absolute Invarianten hat, d.h. eine C_3 hat, deren eine, eine C_4 sechs.

Man hat ferner versucht, für die niedersten Curven zum mindesten volle Systeme der zugehörigen, invarianten Bildungen aufzustellen, womit man dann aber bald zu Formelgruppen von übergrosser Complicirtheit gelangt ist. Durchgearbeitet ist in dieser Hinsicht eigentlich nur

der Fall der Curven 3. Ordnung, wo Aronhold's Abhandlung 1850 (Crelle 39) den Weg gebahnt hat. Aronhold fand insbesondere, daß sich alle Invarianten der C_3 aus zwei, S und T, zusammensetzen, von denen die eine von der 4ten, die andere von der 6ten Ordnung in den Coëfficienten ist, und die genau den beiden Invarianten g_2 und g_3 des elliptischen Integrals entsprechen, das man an der C_3 hinerstrecken kann.

Man hat endlich insbesondere Invarianten etc. der ebenen Curven näher untersucht: Die Discriminanten, Tactinvarianten etc. und diejenigen Covarianten, welche gleich Null gesetzt die Hesse'sche Curve, Steiner'sche Curve etc. etc. liefern. Das Nähere hierzu vergleiche bei Salmon oder Clebsch-Lindemann.

<u>b). Zusammenhang mit der Riemann'schen Theorie.</u>

Wir erinnern vorab daran, welcher Art eigentlich die Beziehung zwischen der ebenen Curve und der im abstrakten Sinne zugehörigen Riemann'schen Fläche ist. Es handelt sich darum, daß den ∞^2 Schnittpunktsystemen, welche die Curve mit den ∞^2 geraden Linien der Ebene liefert, auf der Riemann'schen Fläche eine lineare, zweifach unendliche Schaar von untereinander aequivalenten Punktgruppen entspricht. Umgekehrt wird jede solche Schaar durch eine bestimmte, ebene Curve,

d.h. genauer durch die Schnittpunktsysteme, welche eine bestimmte, ebene Curve mit den Geraden der Ebene hat, interpretirt werden können. Und da wolle man nun betrachten, daß diese Curve von vorneherein projectiv, d.h. im Sinne der linearen Invariantentheorie, betrachtet sein will; denn jeder unserer Punktgruppen ist doch mit jeder anderen gleichberechtigt, und es findet also, geometrisch zu reden, keine Auszeichnung einer unendlich fernen Geraden oder gar bestimmter Coordinatenaxen statt. Da entsteht denn die Frage, <u>was die absoluten Invarianten der Curve</u> für die Riemann'sche Auffassung bedeuten? Offenbar sind die Verbindungen jener der Riemann'schen Fläche selbst eigentümlichen Constanten, die wir früher die <u>Moduln</u> derselben nannten, und derjenigen Constanten, durch die man auf der Fläche die Schaar der Punktgruppen auswählt. Möge nun letztere nur in einer Weise vorhanden sein, also bei einmal gegebener Riemann'scher Fläche von gar keiner Constanten mehr abhängen. Da ist der Fall der ∞^2 Punktgruppen $dw = 0$, welche auf einer Fläche $p = 3$ existiren, beziehungsweise der Fall der allgemeinen Curve 4ter Ordnung. <u>Da werden die 6 absoluten Invarianten der Curve geradezu als die Moduln angesehen werden können, von denen die Fläche $p = 3$ abhängt</u>. Und diese Heran=

ziehen der Invariantentheorie bedeutet hier also zunächst für $p = 3$, daß wir für die Moduln der Riemann'schen Theorie, von denen wir bislang nur eine sehr unvollständige Vorstellung hatten, eine klare Definition erhalten. Dieselbe wird sich ohne Weiteres auf höhere p übertragen lassen, sobald wir Curven in mehrdimensionalen Räumen betrachten wollen. Über die Moduln des Falles $p = 1$ wurde soeben schon eine Andeutung gemacht, doch würde es hier zu weit führen, dieselbe weiter zu verfolgen.

Endlich darf man sagen, daß die homogenen Variabelen der Invariantentheoretiker, ihre Covarianten mit mehreren Reihen Veränderlicher immer mehr anfangen, auch in der Theorie der an den Curven hinerstreckten Integrale ihre bedeutende Rolle zu spielen. Da ist zunächst überhaupt die homogene Schreibweise der Integrale, die auf Aronhold zurückgeht und von Clebsch zum Gemeingut der Geometer gemacht wurde:

$$w = \int \frac{\varphi_{n-3}(x_1, x_2, x_3) \cdot (c\, x\, dx)}{\Sigma\, c_i f_i},$$

da ist ferner die algebraische Normierung der Integrale dritter Gattung, wegen deren ich am besten auf meine Arbeit über Abel'sche Functionen in Bd. 36 der Annalen verweise, etc. etc.

Ueberall hat man, wie ersichtlich, die Ansätze zu einer Weiterbildung der Riemann'schen Theorie.

c). Eindeutige Transformationen der Curven.

Bei den eindeutigen Transformationen der Curven ist es nun umgekehrt: da hat die Riemann'sche Theorie der Geometrie erst den richtigen allgemeinen Impuls gegeben. Und zwar schon, was die Fragestellung angeht. Zwei Curven $f(s,z)=0$ und $f(s',z')=0$, die derselben Riemann'schen Fläche zugehören, sind eben darum durch umkehrbare, rationale Transformation verbunden.

$$\begin{array}{l|l} s'=R'_1(s,z) & s=R_1(s',z'), \\ z'=R'_2(s,z), & z=R_2(s',z'). \end{array}$$

Dann namentlich, was den Hauptsatz angeht: dass die beiden Curven dasselbe p besitzen. Es ist das Verdienst von Clebsch 1864 (Über die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie, Crelle 63) diese Fragestellung, bez. diesen Satz von Riemann her in die Curvenlehre übertragen zu haben.

Inzwischen hatten schon vorher die Geometer sich mit eindeutigen Transformationen der ebenen Curven beschäftigt; nur waren es solche Transformationen gewesen, welche nicht nur für die einzelne Curve sondern für die ganze Ebene eindeutig sind. Das einfachste Beispiel einer solchen Transformation, das schon bei Poncelet vorkommt, ist das Beispiel der sogenannten quadratischen Transformation.

Bei Einführung des richtigen Coordinatendreiecks schreibt sich dieselbe so:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} \quad \text{oder:}$$

beziehungsweise

$$\rho y_1 = x_2 \cdot x_3, \qquad \sigma x_1 = y_2 \cdot y_3,$$
$$\rho y_2 = x_3 \cdot x_1, \qquad \sigma x_2 = y_3 \cdot y_1,$$
$$\rho y_3 = x_1 \cdot x_2, \qquad \sigma x_3 = y_1 \cdot y_2.$$

Reiht man mehrere quadratische Transformationen, welche zu verschiedenen Dreiecken gehören, aneinander, so kann man eindeutige Transformationen der Gesammtebene von beliebig hohem Grade erzielen. Cremona hat sich seiner Zeit die Aufgabe gestellt, die allgemeinste eindeutige algebraische Transformation einer Ebene in sich selbst zu bestimmen (Memorie di Bologna 2 ser. t. II, 1862), — daher „Cremona Transformation". Nöther aber und unabhängig von ihm Rosanes haben bewiesen: (Ann. III, p. 165 (1870), bez. Ann. V, p. 635 (1872); R. in Crelle 73, p. 107 (1871)), daß jede derartige Transformation aus successiven quadratischen Transformationen zusammengesetzt werden kann. —

Ich muß hier einer besonderen Anwendung gedenken, die man in der Theorie der eindeutigen Transformation der Curven gemacht hat, dahingehend:

daß <u>man eine mit beliebigen singulären</u> Punkten ausgestattete Curve durch eindeutige Transformation allemal in eine solche mit nur einfachen Doppelpunkten verwandeln kann *). Das hat die bequeme Folge, daß man sich bei der Behandlung der Abel'schen Integrale etc. darauf beschränken kann, bei der Grundcurve keine anderen singulären Punkte vorauszusetzen, als eben einfache Doppelpunkte. Daneben bleibt dann immer natürlich die Frage bestehen, <u>wie</u> man eine irgendwie vorgelegte Curve in eine Curve dieser einfachen Art transformiren soll. Hier vergleiche man <u>Nöther</u>, Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen, Ann. 23, 1883.

Ich will ferner noch darauf hinweisen, daß ausgehend von der Theorie der besonderen auf einer Riemann'schen Fläche möglicherweise existirenden Punktgruppen man neuerdings vielfach ebene Curven mit besonderen Punktgruppen studirt hat, z. B. die hyperelliptischen Curven,

---

*) Wo ist der Satz zum ersten Male gedruckt? Mir ist derselbe aus mündlichen Mitteilungen von Kronecker vom Herbst 1869 bekannt. – Dem Satz correspondirt der andere, daß man eine Riemann'sche Fläche immer so über eine Ebene ausbreiten kann, daß sie nur einfache Verzweigungspunkte besitzt, von denen keine zwei übereinanderliegen.

die eine ∞^1 Schaar aequivalenter Punktpaare tragen.

II Geometrie auf der Curve.

Was Geometrie auf der Curve angeht, so können wir uns ganz kurz fassen, da hier die von Riemann'scher Theorie ausgehende Behandlungsweise durchaus in den Vordergrund tritt, was wir ausführlicher erst im Sommersemester entwickeln wollen. Wir haben

a) Von den Gruppirungsverhältnissen der Singularitäten der Curven zu behandeln. Da haben wir von geometrischer Seite die Gruppirungsverhältnisse der Wendepunkte der C_3 [Maclaurin, Plücker, Hesse], sowie der Doppeltangenten der C_4 (Hesse und Steiner in Crelle 49, 1855) Dann aber von Riemann'scher Seite her die schon genannte Abhandlung von Clebsch: Ueber die Anwendung der Abel'schen Function in der Geometrie (Crelle 63, 1864), durch welche mit einem Schlage alle die bis dahin bekannten particulären Theoreme unter ein ganz allgemeines, einfaches Schema eingeordnet wurden.

Wenn wir

b). Von den allgemeineren Methoden der Abzählung handeln sollen, so muss ich auf einige geometrischen Lehrbücher wegen der Aufgaben verweisen, die da behandelt werden, und bei denen man sich mit der Zahl der Lösungen begnügt, weil es zu schwierig

scheint, die algebraischen Gleichungen, durch welche die Lösungen definirt werden, explicit hinzuschreiben.

Wir handeln hier nur von der Abzählung besonderer Punkte, auf einer gegebenen Curve $f=0$. Und in dieser Hinsicht hat Chasles einen besonderen Ansatz geschaffen, indem er auf $f=0$ sogenannte Correspondenzen betrachtete, d.h. Abhängigkeiten zwischen 2 Curvenpunkten x und y, derart, daß jedem Punkte x β Punkte y, jedem Punkte y α Punkte x entsprechen. Ist dann für die Curve $p=0$, so hat man auf ihr $(\alpha+\beta)$ „Coincidenzen", ein Satz, den Chasles als „Correspondenzprincip" bezeichnet (Comptes Rendus t. 62, 1864). An diesem Satz ist kaum etwas zu beweisen. Denn führt man den Parameter λ ein, durch dessen Wert sich die Punkte x, y von $f=0$ (im vorliegenden Falle $p=0$) eindeutig darstellen, so wird die Correspondenz notwendig durch eine algebraische Gleichung $\varphi(\overset{\alpha}{\lambda_x}, \overset{\beta}{\lambda_y})=0$ gegeben sein, die natürlich, wenn man $\lambda_y=\lambda_x$ setzt, $\alpha+\beta$ Werte von λ_x liefert. Nicht daß Chasles das Correspondenzprincip der Curven $p=0$ bewiesen hat, sondern daß er die ganze Fragestellung geschaffen und die Anwendbarkeit des Correspondenzprincips bei zahlreichen Abzählungsaufgaben gezeigt hat, das ist seine Leistung. Anders ist es mit dem Princip, wie es Cayley

bald darauf für Curven mit $p > 0$ formulirte (C. R. t. 62, 1864; Proceedings London Math. Society vol. I, 1866; Philosophical Transactions 158, 1868). Cayley giebt die Formel $(\alpha + \beta + 2p\gamma)$, wobei γ ein Attribut der Correspondenz bezeichnet, welches wir hier in Kürze nicht definiren können. Dies ist ein wirklich neuer algebraischer Satz, dessen Richtigkeit zu prüfen bleibt. Dieser Prüfung hat sich dann von geometrischer Seite insbesondere Hr. Brill unterzogen; vergl. Ann. VI, 1873; VII 1874; 31, 1887; 36, 1890. (Vergl. auch eine Arbeit von Zeuthen, die demnächst in Ann. 40 erscheint.).

Und hier ist es nun Hr. Hurwitz, welcher die Principien der Riemann'schen Theorie mit grösstem Erfolge herangezogen hat. (Math. Ann. 28. 1886). Nicht nur dass er durch Verwendung der Abel'schen Functionen die von Cayley - Brill benutzte Darstellung der allgemeinen Correspondenzen als eine nothwendige Kennzeichnen. und übrigens einen einfachen Beweis der Formel $(\alpha + \beta + 2p\gamma)$ geben konnte, er hat insbesondere gefunden dass sich neben diese allgemeinen Correspondenzen unter Umständen andere, singuläre stellen und hat auch deren Theorie völlig erschöpft.

Der Bericht über die Einzelheiten dieser Hurwitz'schen Arbeit wird eine weitere Aufgabe für das Sommer-

semester sein, für welches ich überhaupt folgende Disposition in Aussicht nehme: (vergl. p. 228).

1.) Eine Einleitung, in welcher wir über Raumcurven (eines beliebig ausgedehnten Raumes) in ähnlicher Weise referiren, wie es jetzt über ebene Curven geschehen ist.

2). Die Besprechung dreier ausgewählter Kapitel der Riemann'schen Theorie. Wir behandelen:

a). Die Theorie der symmetrischen Flächen und also der reellen algebraischen Gebilde, – in weiterer Instanz die allgemeine Theorie der Riemann'schen Flächen mit eindeutigen Transformationen in sich,

b). Clebsch' Anwendung der Abel'schen Functionen,

c). Hurwitz' Correspondenztheorie.

RIEMANNSCHE FLÄCHEN.

II.

VORLESUNG,
GEHALTEN WÄHREND DES SOMMERSEMESTERS 1892

VON

F. KLEIN.

GÖTTINGEN 1893.

NEUER UNVERÄNDERTER ABDRUCK.

LEIPZIG 1906.
IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER.

Inhalts-Verzeichnis.

Zunächst Fortsetzung des schon im Winter begonnenen „**Zweiten Teils**" der Gesamtordnung.

1.

[M. 25.4.92]

Die Zielpunkte der Vorlesung, welche ich hiermit beginne, sind alle schon im vergangenen Wintersemester dargelegt worden, und es ist sogar schon eine vorläufige Disposition gegeben worden; wir gehen also gleich in medias res. Indem wir uns auch in der Nummerirung der Abschnitte etc. an das Wintersemester anschliessen, wird uns als zweites Kapitel des zweiten Haupttheils zunächst zu beschäftigen haben:

II. Allgemeiner Bericht betreffend algebraische Raumcurven.

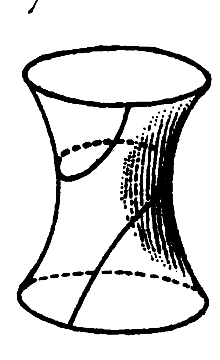
Und zwar erbringen wir zunächst

A. Historisches über die älteren Arbeiten bis ca. 1870.

Das Jahr 1870 mag hier als ungefähre Gränze gelten, weil damals erst die ernstlichen Versuche begannen, die Riemann'sche Theorie in die Lehre von den Raumcurven einzuführen, und weil der Standpunkt, welcher damals herrschte, durch die Lehrbücher, nämlich <u>Salmon's</u> Raumgeometrie und <u>Cremona's</u> Theorie der Oberflächen, wie auch die Vorlesungen von <u>Clebsch</u>

(die in ihren hier in Betracht kommenden Teilen leider noch nicht herausgegeben sind) auch heute nicht leicht zugänglich ist.

Raumcurven sind schon von Monge (um 1800) ausführlich betrachtet worden. Aber sein Interesse betraf solche Fragen, welche mit der Anwendung der Differential- und Integral-rechnung zusammenhängen, wie Krümmungsverhältnisse etc. Da ist denn unwesentlich, ob die Raumcurve algebraisch ist; der Schwerpunkt liegt darauf, dass sie analytisch ist. Die Theorie der algebraischen Raumcurven beginnt erst 1827 mit Moebius' barycentrischem Calcul, in welchem zum ersten Male die einfachste Raumcurve, die es überhaupt giebt, nämlich die Raumcurve 3ter Ordnung betrachtet worden ist. Wollen Sie betreffs derselben vorläufig folgendes Bild festhalten:



Die Raumcurve erscheint hier auf einem einschaligen Hyperboloid gelegen, wobei sie die Erzeugenden der einen

Schaar je in einem, die Erzeugenden der anderen Schaar je in 2 Punkten trifft. Eine andere Art alg. Raumcurven, die man frühzeitig betrachtet, sind die sogenannten Raumcurven vierter Ordnung erster Species d. h. die Durchdringungscurven zweier Flächen zweiten Grades. In der That hat man ja in der darstellenden Geometrie den Bedürfnissen der Praxis entsprechend, unausgesetzt mit solchen Raumcurven zu tun (Durchdringungscurven zweier Rotationscylinder etc.) Man vergleiche, wie auch wegen der Raumcurven dritter Ordnung, Chasles' Aperçu historique (1837). Aber erst um das Jahr 1850 nahm die Theorie unter den Händen der englischen Geometer Cayley und Salmon einen höheren Aufschwung. Derselbe Band V des Cambridge and Dublin Mathematical Journal (1850) bringt eine Arbeit von Salmon aus dem Jahre 1849 über die Classification der Raumcurven, und Cayley's Uebertragung der Plücker'schen Formeln auf dieselben. (die übrigens schon 1846 in Bd. X von Liouville's Journal vorher publicirt war) Indem wir uns an die Entgegenstellung dieser beiden Arbeiten anschliessen, handeln wir hier.

ad. 1) Von der Aufzählung der niedersten Raumcurven oder sonst specieller Raumcurven.

Zwei Charactere sind es, welche Salmon dabei haupt-

sächlich in Betracht zieht: Die Ordnung ν und die Zahl h der scheinbaren Doppelpunkte. Hauptbeweismittel ist der Satz, daß eine Curve n^{ter} Ordnung von einer Fläche m^{ter} Ordnung in $m\,n$ Punkten geschnitten wird. Warum ist dieser Satz richtig? Warum giebt es überhaupt etwas wie „Ordnung" einer algebraischen Raumcurve? Die englischen Geometer der damaligen Zeit haben sich um derartige principielle Fragen nur wenig Sorge gemacht; von unserem Riemann'schen Standpunkte aus beantworten wir sie sofort. In der Tat wird

$$\frac{F_m(x_1\,x_2\,x_3\,x_4)}{x_4^m}$$

eine „algebraische Function" auf der Curve sein müssen, und eine solche hat ebensoviele Nullpunkte als Unendlichkeitspunkte. $F=0$ verschwindet also in $m\,n$ Punkten, wenn die unendlich ferne Ebene in n Punkten schneidet. Andererseits bemerke man, daß die Zahl h mit dem Riemann'schen p auf das Engste zusammenhängt: Da die Centralprojectionen unserer Curve auf irgendwelche Ebene eine C_n mit h Doppelpunkten ist, so ist

$$p = \frac{n-1 \cdot n-2}{2} - h.$$

Salmon betrachtet nun erstlich die volle Schnittcurve zweier Flächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung: $F_\mu=0$ und $F_\nu=0$.

Offenbar ist hier

$$n = \mu \cdot \nu$$

Aber wie gross ist h? Sei F_μ symbolisch $= a_x^\mu$, $F_\nu = b_x^\nu$. Sei ferner x ein Punkt der Curve, y irgend ein Raumpunkt. Soll dann $x + \lambda y$ der F_μ angehören, so bekommen wir für λ die Gleichung:

$$\mu . a_x^{\mu-1} a_y . \lambda + \frac{\mu . \mu-1}{2} a_x^{\mu-2} a_y^2 . \lambda^2 + \ldots\ldots a_y^\mu . \lambda^\mu = 0,$$

soll es der F_ν angehören, so entsteht:

$$\nu . b_x^{\nu-1} b_y . \lambda + \frac{\nu . \nu-1}{2} b_x^{\nu-2} b_y^2 \lambda^2 + \ldots\ldots b_y^\nu . \lambda^\nu = 0.$$

Wir trennen von den beiden Gleichungen die Wurzel $\lambda = 0$ ab und verlangen, dass sie nunmehr noch eine Wurzel λ gemein haben sollen. In der Tat ist dann die Gerade $\overline{xy}$ eine Secante der Raumcurve und unsere Frage ist doch gerade, wie viele solcher Secanten durch den Punkt y gehen. Nun giebt die Elimination von λ zwischen den beiden Gleichungen das Resultat:

$$\begin{array}{l} (\nu-1)\text{ Zeilen!} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ (\mu-1)\text{ Zeilen!} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} a_x^{\mu-1} a_y, & \frac{\mu-1}{2} a_x^{\mu-2} a_y^2, & \ldots\ldots & a_y^\mu & 0 & \ldots 0 \\ 0 & a_x^{\mu-1} a_y & \ldots\ldots & \ldots & a_y^\mu & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_x^{\nu-1} b_y, & \frac{\nu-1}{2} b_x^{\nu-2} b_y^2, & \ldots & b_y^\nu & 0 & \ldots 0 \\ 0 & b_x^{\nu-1} b_y & \ldots\ldots & \ldots & b_y^\nu & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right| = 0$$

d.h. eine Gleichung

$$F(x|y) = 0,$$

welche in x vom Grade $(\mu-1)(\nu-1)$ ist, (wie z. B. das Diagonalglied der Determinante zeigt). Daher ist die Anzahl der Punkte x, die mit y verbunden eine Secante unserer Raumcurve liefern

$$\mu\nu(\mu-1)(\nu-1),$$

und da jede Secante zwei solche Punkte x trägt, wird schliesslich:

$$h = \frac{\mu\nu}{2}(\mu-1)(\nu-1).$$

Hier die Charactere der niedersten Fälle:

μ	ν	$\mu\nu$	h	p
2	2	4	2	1
2	3	6	6	4
2	4	8	12	9
3	3	9	18	10

Aber man erkennt zugleich (indem in dieser Tabelle beispielsweise die Raumcurven dritter Ordnung fehlen), dass nicht jede Raumcurve eine volle Schnittcurve (zweier Flächen) sein kann. Und hiermit, mit der Frage nach den unvollständigen Schnittcurven, treten wir nun in den interessanteren Teil unseres Gebietes.

Bemerken wir übrigens vorläufig, dass auch eine sogenannte unvollständige Schnittcurve, sofern man sie nur mehrfach zählen will, den ausschliesslichen Schnitt

zweier Flächen ausmachen kann. Hat man z. B. eine Linienfläche dritter Ordnung und legt von einem beliebigen Punkte an die Fläche den Umhüllungskegel, so erscheint derselbe als Kegel zweiten Grades, und Fläche und Kegel berühren einander dann entlang einer Raumcurve 3ter Ordnung! – Solche „Berührungsschnitte" sind indess seitens der Geometer bislang nur erst gelegentlich betrachtet worden. Die Methode, deren man sich durchweg bedient, um unvollständige Schnittcurven von den hindurchgehenden Flächen aus zu erzeugen, ist die, daß man die Flächen durch eine bereits bekannte Curve hindurchlegt und dann nach dem *Restschnitte* fragt.

Möge also die Durchdringungscurve von $F_\mu = 0$, $F_\nu = 0$ in zwei Curven mit den Characteren n', h' und n'', h'' zerfallen. Dann ist erstlich $n' + n'' = \mu\nu$.

Wir bezeichnen ferner mit H die *scheinbaren* Schnittpunkte, welche die beiden Curven von einem Raumpunkte y gesehen besitzen, – die *wirklichen* Schnittpunkte, welche sie besitzen mögen, zählen wir dabei ausdrücklich nicht mit. Dann wird die eben berechnete Gleichung $F(x/y) = 0$ auf C' augenscheinlich $2h' + H$, auf C'' $2h'' + H$ Punkte festlegen, sodaß wir die beiden Gleichungen bekommen:

$$2h' + H = n'(\mu - 1)(\nu - 1), \quad 2h'' + H = n''(\mu - 1)(\nu - 1).$$

Die Zahl der wirklichen Schnittpunkte, welche C' u. C'' besitzen

werden, bezeichnet man hinterher als

$$n'n'' - H. -$$

So erscheint beispielsweise unsere C_3 $(h = 1)$ zusammen mit einer geraden Linie, also einer C_1 $(h = 0)$, welche sie zweimal trifft als mögliche Form des Durchschnitts zweier Flächen 2ten Grades.

[D. 28.4.92]

Salmon hat von hier aus insbesondere die Raumcurven 4ter Ordnung untersucht. Dabei tritt neben die volle Durchschnittscurve zweier Flächen 2ten Grades die sog. Raumcurve vierter Ordnung erster Species mit den Characteren:

$$\mu = 2, \nu = 2; h = 2, p = 1$$

die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species:

$\mu = 2, \nu = 3$; Abtrennung zweier windschiefer $(h = 3, p = 0)$ Geraden von der Schnittcurve

Hier ferner die von Cayley (siehe unten) gegebene Aufzählung der Raumcurven fünfter Ordnung:

	μ	ν	Restschnitt	h	p
I	2	3	Eine C_1 trennt sich ab.	4	2
II	2	4	Drei windschiefe C_1	6	0
III	3	3	Eine C_4 der ersten Species	5	1
IV	3	3	Eine Raumcurve 3. Ordnung u. eine sie nicht treffende Gerade	6	0

Die Arten II und IV, welche in der Zahl der scheinbaren Doppelpunkte übereinstimmen, unterscheiden sich dabei durch die Constantenzahl, welche bei II 19, bei IV aber 20 beträgt; II kann als spezieller Fall von IV aufgefaßt werden. – Es ist in der Tat nicht schwer, bei diesen niederen Werten von n die Vollständigkeit der Aufzählung zu controlieren. Man überlege sich einfach, in wie vielen Punkten eine C_n von einer F_μ geschnitten wird, und durch wieviele Punkte umgekehrt man sicher eine F_μ hindurchlegen kann. Ist letztere Zahl grösser als erstere, so liegt die C_n sicher auf einer ev. auf mehreren F_μ, – vorausgesetzt, daß die C_n irreducibel ist, wie wir hier selbstverständlich annehmen. Aber bei höheren Werten von n kommt man mit solchen einfachen Ansätzen nicht mehr durch. Man muß da principieller zu Werke gehen, als es seiner Zeit die englischen Geometer taten (welche bei diesen Untersuchungen die inductive Methode handhabten).

Ich nenne beispielsweise folgende zwei Fragen, die man die Fragen nach dem Rationalitätsbereiche und nach dem Integritätsbereiche einer Raumcurve nennen könnte.

1) Wieviele Flächen sind jedenfalls hinreichend, um eine Raumcurve rein darzustellen?

2) Wieviele Flächen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ .... $f_\varrho = 0$ muß man

unter den durch eine Raumcurve hindurchgehenden Flächen herausgreifen, damit jede andere durch die Curve gehende Fläche $F = 0$ die Darstellung gestatte:

$$F = M_1 f_1 + M_2 f_2 + \dots\dots M_\varrho f_\varrho$$

unter $M_1, M_2, \dots$ rationale ganze Multiplicationen verstanden?

Hier ist No 1) leicht dahin zu beantworten (wie das beispielsweise Kronecker in seiner Festschrift von 1882, Crelle 92, tut), daß immer 4 Flächen zur reinen Darstellung einer Raumcurve ausreichen; wir kommen bald darauf noch zurück.

Demgegenüber hat No 2) einen wesentlich höheren Charakter. Kronecker hat l.c., wie andererseits Hilbert in Math. Ann. 36 bewiesen, daß man auf alle Fälle mit einer endlichen Zahl von Flächen $f_1 = 0, \dots f_\varrho = 0$ reicht.

Dabei dringt Hilberts Entwickelung wesentlich tiefer ein, indem er durchweg mit homogenen Variablen operirt. Kronecker's Satz würde richtig sein, wenn man das einzelne $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$, das entlang der Curve verschwindet, nicht selbst in der Gestalt $M_1 f_1 + \dots M_\varrho f_\varrho$ darstellen könnte, sondern erst nach Multiplication mit einer geeigneten Potenz von x_4. Geometrisch hieße das, daß man der Fläche $F = 0$ um die ge-

wünschte Darstellung durch $f_1 \ldots f_\varrho$ zu ermöglichen, noch die unendlich weite Ebene mit einer gewissen Multiplicität zufügen müsste. Hilbert's Entwickelung beweist, dass man diese Potenz von x_4 einsparen kann. –

Doch ich kehre zu meinem historischen Referate zurück. Neben die Darstellung der Raumcurve durch ihre *Gleichungen* $F_\mu = 0$, $F_\nu = 0$, ..., von der Salmon ausging, tritt als zweite Methode die *Parameterdarstellung derselben*. Eben durch eine solche Parameterdarstellung führt Moebius in seinem barycentrischen Calcul zuvörderst die „rationalen" Raumcurven ein; er setzt die homogenen Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ eines Punktes der Raumcurve mit Polynomen $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \varphi_3(\lambda), \varphi_4(\lambda)$ einer Veränderlichen λ proportional. Natürlich giebt das nur die Raumcurven mit $p = 0$; will man die algebraischen Raumcurven haben, muss man zwei Parameter λ, μ einführen, die irgendwie durch eine algebraische Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ aneinander gebunden sind, und dann $\varrho x_i = \varphi_i(\lambda, \mu)$ schreiben. Das ist im Grunde derselbe Ansatz, durch den wir im vorigen Semester die Gesammtheit der Raumcurven von der Riemann'schen Theorie aus hatten entstehen lassen: wir hatten damals x_1/x_4 x_2/x_4 x_3/x_4 drei algebraischen Functionen gleich ge-

setzt, welche auf irgendwelcher vorgegebenen Riemann'schen Fläche existiren.

<u>Dieser Parameterdarstellung der Raumcurven</u> hat nun <u>Cayley</u> 1862, 1864 in den Comptes Rendus t 54, 58 eine besonders anschauliche Form gegeben. Er projicirt die Raumcurve von der vierten Ecke des Coordinatentetraeders auf die gegenüberliegende Seitenfläche und nimmt nun die Verhältnisse der homogenen Coordinaten des jedesmaligen Projectionspunktes als λ, μ. Schreiben wir homogen machend für λ, μ die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$, so erhalten wir für unsere Raumcurve Formeln der folgenden Art:

$$\rho x_1 = \lambda_1, \; \rho x_2 = \lambda_2, \; \rho x_3 = \lambda_3, \; \rho x_4 = \frac{U_\nu(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}{V_{\nu-1}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}$$

Dabei ist die zwischen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestehende Relation

$$f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = 0$$

nichts anderes als die Gleichung der Projectionscurve. — Wir eliminiren nun mit Cayley die $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ und erhalten einerseits

$$f(x_1 \; x_2 \; x_3) = 0,$$

andererseits

$$V_{\nu-1}(x_1, x_2, x_3) . x_4 = U_\nu(x_1, x_2, x_3).$$

Die Curve erscheint so als Schnitt des von der Coordinatenecke ausgehenden Kegels $f = 0$ mit einer Fläche, in welcher das x_4 nur einzeln auftritt, und welche darum von Cayley als

Monoid bezeichnet worden ist.

Die beiden Flächen haben außer unserer Raumcurve nur noch höchstens gerade Linien gemein, die durch die Coordinatenecke hindurchlaufen, nämlich alle diejenigen geraden Linien, welche die Coordinatenecke mit solchen Punkten von $f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = 0$ verbinden, in denen U_ν und $V_{\nu-1}$ gleichzeitig verschwinden (und für die eben darum $x_4 = \frac{U_\nu}{V_{\nu-1}}$ unbestimmt wird).

Cayley hat diese Darstellung durch „Kegel und Monoid" l. c. insbesondere benutzt, um die Aufzählung der Raumcurven 5ter Ordnung zu geben, von der wir schon oben berichteten. Später hat Ed. Weyr. auf demselben Wege die Raumcurven 6ter Ordnung untersucht (Comptes Rendus t. 76, 1873); vergl. hierzu die Ergänzungen bei Nöther in Crelle 93.

Wir bemerken noch, daß vermöge dieser Darstellung der oben angeführte Satz von den 4 Flächen, welche ausreichen, um eine Raumcurve rein zu bestimmen, sofort folgt. Man beziehe die Raumcurve auf zwei verschiedene Coordinatensysteme und stelle sie in jedem derselben durch Kegel und Monoid dar. Der einzelne Kegel hat mit dem zugehörigen Monoid außer der Raumcurve auch eine Anzahl überflüssiger Geraden gemein, aber diese Geraden gehören keineswegs dem anderen Kegel bei dem anderen Monoid an, sie haben sogar mit beiden

Flächen zugleich keinen Schnittpunkt gemein, der nicht auf der Raumcurve läge. Die beiden Kegel mit den beiden Hyperboloiden zusammen geben uns darum ein Beispiel von solchen 4 Flächen, wie wir sie suchen.

An die Aufzählung der niedersten Raumcurven, die wir jetzt verlassen, schliesst sich die Betrachtung solcher höherer Curven, welche durch ihre Eigenschaften besonders zugänglich sind. Wir haben da zuvörderst:

Curven, die sich durch Nullsetzen einer Matrix darstellen lassen.

Das einfachste Beispiel geben da Raumcurven dritter Ordnung $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$, ebene d. h. lineare Formen der $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ und man setzt die folgende Matrix gleich Null.

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

d. h. sämmtliche Determinanten gleich Null, die sich aus ihr bilden lassen:

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0 \;,\; p_1 r_2 - p_2 r_1 = 0$$
$$q_1 r_2 - q_2 r_2 = 0,$$

so giebt das eine Raumcurve 3ter Ordnung. Die beiden ersten Gleichungen $p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0$ und $p_1 r_2 - p_2 r_1 = 0$ geben nämlich zwei Flächen zweiten Grades, welche als solche eine Curve 4. Ordnung gemein haben, die

sichtlich die Gerade $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ als Bestandteil enthält und also übrigens noch aus einer Curve 3. Ordnung besteht. Nun ist die 3te Gleichung $q_1 r_2 - q_2 r_1 = 0$ eine Folge der beiden ersten, sofern man nicht gerade $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ voraussetzt; sie giebt also eine f_2, welche wohl noch durch die Curve 3. Ordnung, aber nicht mehr durch die Gerade $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ hindurchläuft. Analog wird jede Matrix, welche eine Colonne mehr als Zeilen enthält, sofern die Elemente Formen der $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ sind, eine Raumcurve vorstellen.

Man hat sich mit diesen Curven, sowie überhaupt mit den durch Matrices dargestellten Gebilden viel beschäftigt, indem man einmal bei zahlreichen Problemstellungen zu ihnen geführt wurde, andererseits bei ihnen gewisse Eigenschaften ohne Weiteres erkennen konnte. So sind z. B. diese Curven der projectiven Erzeugung im Sinne der neueren synthetischen Geometrie besonders zugänglich. Um hierfür wenigstens einen Ansatz zu geben, nehme man wieder die Matrix der Curve dritter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

Ihr Verschwinden kann auf doppelte Weise als Eliminationsresultat aufgefasst werden:

1). als Bedingung dafür, daß die drei Gleichungen mit 2 homogenen Variablen

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 0, \quad \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = 0, \quad \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 0$$

nebeneinander bestehen,

2). als Bedingung dafür, daß die 2 Gleichungen mit 3 Variabelen:

$$\lambda p_1 + \mu q_1 + \nu r_1 = 0,$$
$$\lambda p_2 + \mu q_2 + \nu r_2 = 0$$

die Verhältnisse $\lambda : \mu : \nu$ nicht festlegen:

Hier bedeutet 1):

Die Punkte der Curve 3. Ordnung sind der Schnitt entsprechender Ebenen aus drei projectiv aufeinander bezogenen Ebenenbündeln

und 2):

Die Punkte der Curve 3. Ordnung erscheinen als solche Raumpunkte, durch welche von den Schnittlinien zweier entsprechender Ebenen aus projectiv aufeinander bezogenen Ebenenbündeln unendlich viele hindurchgehen. *)

Diese Schnittlinien bilden in ihrer Gesammtheit ein sogenanntes „Strahlensystem" und zwar ein Strahlensystem 1ter Ordnung, da ja für einen beliebigen Raumpunkt die $\lambda : \mu : \nu$ aus den vorstehenden Gleichungen durchaus bestimmte Werte haben werden.

---

*) Vergl. hierzu Seydewitz in Grunerts Archiv 10, 1847.

Die Curve 3. Ordnung ist die „Raumcurve" dieses Strahlensystems (welches übrigens einfach das System der zur Curve 3. Ordnung gehörigen Secanten ist!).

Wir verfolgen das hier nicht, sondern geben nur noch bezügliche Citate.

Von synthetischer Seite beschäftigt sich mit den Matrixgleichungen ausführlich *Cremona* in seiner *Theorie der Oberflächen*, womit man von unseren Arbeiten vielleicht vergleichen mag:

Schur in den Math. Annalen 18, 1881.
Reye in Crelle 107. 108 (1891)
Stahl im eben erschienenen Annalenhefte t. 40, No 1.

Für den Analytiker stellt sich die Frage natürlich unter allgemeineren Gesichtspunkten. Ich verweise hier nur auf *Salmon's* Höhere Algebra: das Kapitel von der Ordnung von „restricted systems of equations", wo man zahlreiche weitere Literatur angegeben findet.

Eine zweite Kategorie specieller Raumcurven, die vielfach untersucht worden sind, bilden.

die Curven auf Flächen zweiten und dritten Grades.

In dieser Hinsicht sind, was Flächen zweiten Grades

angeht, die Untersuchungen von Plücker (Crelle 34, 1847) und Chasles (Comptes Rendus t. 53, 1860) bahnbrechend gewesen, für Flächen 3. Ordnung sodann die Arbeiten von Clebsch und Cremona Crelle 65 resp. 68, 1866 – 1868). Wir beziehen uns hier auf diese Arbeiten nicht nur wegen ihrer für die Curvenlehre wichtigen Resultate, sondern insbesondere auch wegen ihrer Methode. Diese Methode geht nämlich davon aus, daß man die Flächen 2ter wie 3ter Ordnung ein-eindeutig auf die Ebene abbilden kann, etwa so, wie man eine rationale Curve, indem man ihre Punkte durch einen Parameter λ rational darstellt, ein-eindeutig auf eine Gerade bezieht. Dabei treten freilich in der Ebene wie auf der Fläche, allgemein zu reden, eine Anzahl „Fundamentalpunkte" auf, d. h. Punkte, denen auf der Fläche, bez. Ebene ganze Curven, entsprechen, in denen also die im Allgemeinen ein-eindeutige Beziehung der beiderseitigen Flächenpunkte unbestimmt wird. Wir werden über die auf F_2 oder F_3 verlaufenden Raumcurven allen Aufschluß erhalten, indem wir die Beziehungen betrachten, welche die ebenen, algebraischen Curven zu den in der Ebene gelegenen Fundamentalpunkten der Abbildung darbieten. Uebrigens aber bietet sich diese Bemerkung. Wir besprachen im Wintersemester

die eindeutigen Beziehungen einer Ebene auf sich selbst (Cremona Transformationen); jetzt haben wir ein-eindeutige Beziehungen zwischen Ebene und Fläche vor uns. Wir erkennen die Möglichkeit, dass man die ein-eindeutigen Beziehungen zweier algebraischer Flächen aufeinander überhaupt zum Gegenstande der Untersuchungen macht.

Die hiermit bezeichnete Fragestellung erscheint als Weiterführung der Betrachtungen über ein-eindeutige Beziehung zweier Curven auf einander, wie sie uns in der Riemann'schen Theorie immerzu beschäftigen. Natürlich braucht man dann auch nicht bei den Flächen, d. h. den zweidimensionalen Gebilden stehen zu bleiben, sondern kann die ein-eindeutigen Beziehungen beliebig ausgedehnter algebraischer Mannigfaltigkeiten in Untersuchung ziehen. Wir haben damit eine grosse Problemstellung, welche die Geometer von 1870 beginnend in der Tat vielfach bearbeitet haben, allen voran Nöther in Bd. 2 und 8 der math. Annalen (1870, 1875)

Die ein-eindeutige Abbildung der Flächen zweiten Grades auf die Ebene geschieht durch das bekannte Verfahren der stereographischen Projection: Sei O der auf der Fläche gelegene Projectionspunkt, g', g'' seien die durch ihn laufenden

Erzeugenden der Fläche, welche die Bildebene in den beiden Punkten O' O'' schneiden. O wird dann ein „Fundamentalpunkt der Fläche" sein, insofern ihm alle Punkte der Ebene entsprechen, in den diese von den Tangenten getroffen wird, die man in O an die Fläche legen kann, d. h. aber alle Punkte der Geraden $O'O''$.

Andererseits sind O' und O'' „Fundamentalpunkte der Ebene", denn ihnen entsprechen auf der Fläche sämtliche Punkte von P', bez. P''. Möge jetzt eine Raumcurve n^{ter} Ordnung auf der Fläche verlaufen. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir jedenfalls annehmen, daß dieselbe durch O nicht hindurchgeht. Sie wird dann P' sagen wir in n' Punkten schneiden, P'' in n'', wo $n' + n'' = n$. In der Bildebene aber erscheint sie als <u>ebene Curve n^{ter} Ordnung, welche n' mal durch O' und n'' mal durch O'' geht</u>. Und nun ist das Wichtige, daß man diesen Satz ersichtlicherweise umkehren kann: <u>Indem wir alle ebenen Curven n^{ter} Ordnung aufzählen, die n' mal durch O', n'' mal durch O'' hindurchlaufen, wo $n' + n'' = n$, erhalten wir alle Raumcurven n^{ter} Ordnung der Fläche 2ten Grades.</u> Da haben wir für $n = 1$ entweder $n' = 1$, $n'' = 0$ oder $n' = 0$, $n'' = 1$ zu nehmen und erhalten so die beiden Schaaren geradliniger Erzeugender der Fläche. Für $n = 2$ kommen, sofern wir Curven aus-

schliessen wollen, die in 2 gerade Linien zerfallen, nur $n' = 1, n'' = 1$ in Betracht, entsprechend den ebenen Schnitten der Fläche zweiten Grades. Raumcurven 3ter Ordnung giebt's sodann zweierlei (immer von den reducibelen Curven abgesehen), jenachdem wir $n' = 2, n'' = 1$ oder $n' = 1, n'' = 2$ nehmen. Ferner 3 Arten von Raumcurven 4ter Ordnung. Die mit $n' = 3, n'' = 1$, resp. $n' = 1, n'' = 3$ sind Curven der 2ten Species, mit $p = 0$, die anderen mit $n' = 2, n'' = 2$ Curven der ersten Species, mit $p = 1$. Ueberhaupt wird der volle Schnitt der Fläche zweiten Grades mit einer Fläche ν Grades sich als Curve der Ordnung $n = 2\nu$ darstellen, für welche $n' = n'' = \nu$ ist.

Indem dieser Satz umkehrbar ist, erfahren wir zugleich, wie man die anderen Curven, bei denen $n' \lessgtr n''$ ist, am einfachsten zu einer vollen Schnittcurve ergänzt. Sei etwa $n' > n''$. Wir werden dann einfach $(n' - n'')$ durch O'' laufende Gerade unserer ebenen C_n hinzufügen und erhalten so eine $C_{2n'}$, welche das Bild des vollen Schnittes der Fläche 2ten Grades mit einer zutretenden Fläche der Ordnung n' ist. Notiren wir vielleicht noch folgende Sätze, die man unmittelbar verificirt.

Das Geschlecht p der Curve $n$ter Ordnung wird am grössten, wenn man n' dem n'' möglichst gleich nimmt. Ist n gerade, so setze man $n' = n''$ und hat dann $p = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$,

ist n ungerade, so $n' = n'' - 1$ und hat $p = \frac{n-1 . n-3}{4}$

Zwei Curven (n', n'') und (m', m'') schneiden sich auf der Fläche 2ten Grades in $m'n'' + n'm''$ Punkten.

Alles dies ist in Uebereinstimmung mit dem, was wir von früherher über die Curven niederster Ordnung auf der Fläche 2ten Grades wissen, und zeigt, wie man vermöge der ebenen Abbildung geradezu *eine volle Geometrie der auf der Fläche verlaufenden algebraischen Curven entwerfen kann.* —

Kurz zur Abbildung der Flächen 3ter Ordnung. Ich werde mich hier mit der Herstellung dieser Abbildung nicht weiter aufhalten, sondern nur kurz das Resultat beschreiben. Dasselbe geht dahin, daß in der Ebene sechs Fundamentalpunkte auftreten:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

sechs windschiefen Geraden der Fläche 3ter Ordnung entsprechend, und daß die ebenen Schnitte der Fläche in der Bildebene als Curven 3ter Ordnung erscheinen, welche durch die Fundamentalpunkte je einfach durchlaufen. Wird jetzt in der Ebene eine Curve n ter Ordnung gegeben, welche α_i mal durch den i ten Fundamentalpunkt geht, so giebt das auf der Fläche ersichtlich eine Curve der Ordnung $3n - \Sigma\alpha_i$. Wir setzen diese Zahl der Reihe nach $= 0, 1, 2, \ldots$ und suchen die ganzzahligen Lösungen der solcherweise

entstehenden diophantischen Gleichung jedesmal zu erschöpfen. Wir erhalten so beispielsweise:

$3n - \sum \alpha_i$ kann nicht auf Null herabsinken, daher liegen auf der Fläche dritter Ordnung bei der Abbildung, die wir untersuchen, keine Fundamentalpunkte.

Ausser den 6 Geraden, die sich in die Fundamentalpunkte selbst abbilden, enthält die Fläche dritter Ordnung deren noch 21, entsprechend den 15 Verbindungsgeraden, welche die Fundamentalpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 in der Ebene aufweisen, und den 6 Kegelschnitten, welche man durch je 5 der Fundamentalpunkte in der Ebene construiren kann.

Raumcurven 3ter Ordnung giebt es auf der Fläche eine grosse Zahl, insbesondere werden die geraden Linien der Ebene, welche durch keinen Fundamentalpunkt laufen, wie andererseits diejenigen ebenen Curven fünfter Ordnung, welche jeden Fundamentalpunkt zum Doppelpunkt haben, Raumcurven 3. Ordnung der Fläche vorstellen.

Man nehme ferner, dass der volle Schnitt der F_3 mit einer zutretenden F_ν sich als Curve $3\nu^{ter}$ Ordnung darstellt, welche ν mal durch jeden Fundamentalpunkt geht, und dass dieser Satz wieder umkehrbar ist. So werden wir alle Fragen, die sich auf die Schnitte

der F_3 mit anderen Flächen beziehen, mit Leichtigkeit beantworten können. Man zeichne z. B. in der Ebene:

a) den Kegelschnitt, der durch die Fundamentalpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 läuft.

b). eine C_5, welche jeden Fundamentalpunkt zum Doppelpunkt hat,

c) einen Kegelschnitt, der durch 6 hindurchläuft.

Es giebt das auf die F_3 übertragen:

a) eine gerade Linie

b) eine zu dieser Geraden windschiefe Raumcurve 3ter Ordnung,

c) eine Raumcurve 5ter Ordnung, vom Geschlechte 0.

Aber a), b), c) zusammen geben in der Ebene eine Curve 9ter Ordnung, welche durch jeden Fundamentalpunkt dreimal hindurchgeht. Daher geben a), b), c) zusammen im Raume den vollen Schnitt der F_3 mit einer zutretenden Fläche 3ter Ordnung. Wir haben so die Existenz zweier Raumcurven 5ter Ordnung nachgewiesen, die wir auf p. 8 an 4ter Stelle angeführt hatten. –

Nun kann man ferner unternehmen, alle Curven 5ter, 6ter .... Ordnung der F_3 aufzuzählen. Außer den bereits genannten Abhandlungen von Clebsch und Cremona wolle man in dieser Hinsicht Cremona's Theorie der

Oberflächen, sowie die Arbeiten von Sturm in Bd. 21 der Math. Annalen (1883) vergleichen. (Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche 3ter Ordnung.) –

Bemerken wir schliesslich noch, dass die hiermit geschilderten Verhältnisse sich selbstverständlich modificiren, wenn die Fläche 3ter Ordnung besondere Singularitäten erhalten sollte. Die sechs Fundamentalpunkte nehmen dann ev. besondere Lagen an, rücken zum Teil einander unendlich nahe, etc. etc. Man vergleiche die hierauf bezügliche Arbeit von Dickmann in Bd. 4 der Annalen (1871), an der ich einen gewissen Anteil habe, insofern D. dieselbe wesentlich unter meiner Leitung ausgeführt hat.

Übrigens kann die Frage nach der Gestaltung [Di. 3.5.92.] der Abbildung in besonderen Fällen natürlich auch bei den Flächen 2. Grades gestellt werden. Wir haben da als einzige Ausartung den Übergang der Fläche in einen Kegel in Betracht zu ziehen. Wir erhalten darauf bei der stereographischen Projection zwei unendlich nahe Fundamentalpunkte O', O''. In der Tat läuft ja jetzt durch O nur eine einzige Erzeugende $P' = P''$. Eine Curve, welche $P' = P''$ irgendwie durchsetzt, wird sich in der Ebene so abbilden, dass sie durch $O' = O''$ in bestimmter Richtung hindurchläuft; nur wenn die Curve durch die Spitze des Ke-

gels hindurchläuft, wird diese Richtung unbestimmt werden. Infolgedessen stellt sich beispielsweise eine auf dem Kegel verlaufende Raumcurve dritter Ordnung (welche einmal durch die Kegelspitze geht und übrigens $P' = P$ noch einmal schneidet) in der Abbildung folgendermaßen dar:

Soviel über die Aufzählung der niedersten Raumcurven in der Periode 1850–1870. Wir handeln nun

ad 2) von den Eigenschaften der Raumcurven, die man damals insbesondere in Betracht gezogen hat. Hier ist in erster Linie *Cayley's Uebertragung der Plücker'schen Formeln auf die Geometrie der Raumcurven* zu nennen, die wir schon oben citirten (Liouville's Journal X, 1846). Vom Standpunkte der projectiven Geometrie aus wird man nicht einseitig die Punkte der *Raumcurve* betrachten, sondern gleichzeitig die *Tangenten* derselben (welche die zur Curve gehörige Developpable bilden) und die *Osculationsebenen* derselben (welche die Developpable umhüllen): der Gleichförmigkeit halber mögen wir kurz von den

Punkten, Linien und Ebenen des „Systems" sprechen. Die Ordnung der Curve, die wir jetzt m nennen, erscheint als die Zahl der Punkte, die in einer beliebigen Ebene des Raumes liegen; dem tritt nun dualistisch die Klasse n entgegen. Daneben werden wir als Rang r die Zahl der Linien des Systems bezeichnen, welche eine beliebig vorgegebene Gerade schneiden. Von Singularitäten, welche die Curve in ihrem Verlaufe darbieten kann, zieht Cayley nur die stationären Punkte und stationären Ebenen in Betracht, deren Anzahlen er bez. mit β und α bezeichnet. Ein stationärer Punkt erscheint dem Auge als eine Spitze der Curve; eine stationäre Ebene wird am besten als eine solche Osculationsebene der Curve erklärt, welche nicht 3, sondern 4 aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve gemein hat. Daneben betrachtet dann Cayley noch folgende Zahlen:

Die Zahl h der „Linien durch 2 Punkte", welche durch einen beliebigen Raumpunkt gehen (also die Zahl der Secanten der Curve, die durch den Raumpunkt gehen).

Die Zahl y der „Ebenen durch 2 Linien", welche durch beliebigen Raumpunkt gehen, d. h. der Ebenen, welche die Curve zweimal berühren.

und dualistisch dazu:

die Zahl g der „Linien in 2 Ebenen", welche in beliebiger Ebene liegen,

die Zahl x der „Punkte in 2 Linien", welche in beliebiger Ebene liegen.

Es zeigt sich, dass diese neuen Zahlen

$$m, n, x, \alpha, \beta, g, h, x', y$$

zusammen gerade ausreichen, um die Charaktere der beiden ternären eindimensionalen Gebilde, welche man mit unserem Systeme in unmittelbare Beziehung setzen kann, festzulegen, nämlich des „Kegels", den man von einem beliebigen Raumpunkte aus an die Curve legen kann, und der Durchschnittscurve, welche eine beliebige Ebene des Raumes mit der zugehörigen Developpabeln gemein hat. Man findet nämlich beim Kegel:

Ordnung	Classe	Doppelkante	Doppeltangente	Rückkehrkanten
$\mu = m$	$\nu = x$	$\delta = h$	$\tau = y$	$i = \beta$

Wendeebenen

$$K = n$$

und bei der ebenen Curve

Ordnung	Classe	Doppelpunkte	Doppeltangente	Rückkehrkanten
$\mu = x$	$\nu = n$	$\delta = x'$	$\tau = g$	$i = m$

Wendetangente

$$K = \alpha$$

wie wir hier in's Einzelne nicht weiter nachweisen.

Und nun zieht Cayley die Plücker'schen Formeln für jede dieser beiden Reihen von 6 Grössen heran:

$\nu = \mu(\mu-1) - 2\delta - 3\tau, \qquad \mu = \nu(\nu-1) - 2\tau - 3\kappa,$

$\kappa = 3\mu(\mu-2) - 6\delta - 8\tau, \qquad \iota = 3\nu(\nu-2) - 6\tau - 8\kappa.$

Indem dieselben, wie wir wissen, jedesmal nur 3 unabhängige Relationen vorstellen, hat er im Ganzen für seine 9 Zahlen 6 Relationen, mit deren Hülfe er sechs derselben aus den übrigen 3 berechnen kann.

So haben wir beispielsweise für die Raumcurve 3. Ordnung:

$$m = 3,\ \beta = 0,\ h = 1.$$

Infolgedessen wird:

$$r = 4,\ n = 3,\ y = 0,\ x = 0,\ \alpha = 0,\ g = 1.$$

Die Curve ist, was diese Zahlen angeht, sich selbst dualistisch, wie dies aus anderweiten Gründen notwendig ist.

Ferner für die Raumcurve 4. Ordnung 1ter Species:

$$m = 4,\ \beta = 0,\ h = 2,$$

und also:

$$r = 8,\ n = 12,\ y = 8,\ x = 16,\ \alpha = 16,\ g = 38. -$$

Dieser ganze Ansatz ist natürlich nur ein Anfang. Cayley selbst hat das beste dazu getan, um auch anderweite Singularitäten der Raumcurve mit in Betracht zu ziehen, bez. andere für die Raumcurve wesentliche Anzahlen zu bestimmen. Da wir auf keine Einzelheiten eingehen können, beziehen wir uns hier

gleich auf die abschliessende Abhandlung, welche Zeuthen über die hier in Betracht kommenden Fragen 1869 in Bd. III der Serie 2 der Annali di Mathematica veröffentlicht hat (Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable). Zeuthen stattet seine Raumcurve nicht nur mit α stationären Ebenen und β stationären Puncten aus, sondern auch mit G wirklichen Doppelebenen (zweimal osculirenden Ebenen), H wirklichen (nicht blos scheinbaren) Doppelpuncten und v Wendetangenten (Tangenten, die 3 aufeinander folgende Puncte mit der Curve gemein haben). Er betrachtet sodann nicht nur den Kegel, der von einem beliebigen Raumpuncte ausläuft, sondern den Kegel von einem Puncte der Developpablen aus, von einem Puncte der Raumcurve selbst aus etc. etc. Analog nicht nur die allgemeinen, ebenen Schnitte, sondern die Schnitte mit einer Tangentenebene der Curve etc. etc. Allemal können dann wieder die Plückerschen Formeln herangezogen werden. Aber dies ist nur die Vorbereitung. Der Hauptteil der Zeuthenschen Arbeit bezieht sich auf die Bestimmung gewisser, höherer Anzahlen, wie der dreifachen Tangentenebenen der Curve, der Ordnung der Fläche, die von ihren dreifachen Secanten erzeugt wird, der Zahl ihrer einfachen Secanten. Hierbei müssen wir etwas verweilen. Wir greifen dabei

zunächst noch einmal auf den Beweis der Plücker'schen Formeln zurück.

Sei μ die Ordnung, ν die Classe der ebenen [Fr. 6.5.92] Curve, δ die Zahl der Doppelpunkte, τ die der Doppeltangenten, i die Zahl der Spitzen, K diejenige der Wendetangenten.

Wir haben dann vor allen Dingen zu zeigen, daß

$$\begin{cases} \nu = \mu \cdot \mu - 1 - 2\delta - 3i, \\ K = 3\mu \cdot \mu - 2 - 6\delta - 8i, \end{cases}$$

und dieser Nachweis reducirt sich wieder darauf, für die Curve ohne Doppel- und Rückkehrpunkte $\nu = \mu \cdot \mu - 1$ und $K = 3\mu \cdot \mu - 2$ zu finden und dann die Reduction anzubringen, welche diese Zahlen durch die einzelnen Doppel- und Rückkehrpunkte erleiden. Der erste Teil dieses Nachweises, der uns hier hauptsächlich beschäftigen soll, wird gewöhnlich analytisch erbracht. Man stützt sich darauf, daß die Berührungspunkte der Tangenten, welche von irgend einem Punkte O aus an die Curve $f = 0$ laufen, die Durchschnittspunkte von $f = 0$ mit der ersten Polare von O, d. h. Wendepunkte auf $f = 0$ durch den Schnitt mit der Hesse'schen Curve von f bestimmt werden. Eben das Studium der Polaren, wie der Hesse'schen Curve in den singulären Punkten von $f = 0$ giebt sodann die Reductionen, welche an den Zahlen ν und K beim Auftreten

singulärer Punkte anzubringen sind.

Die so geschilderte Methode ist nun aber deshalb auf die Fragen, die wir bei den Raumcurven stellen, nicht übertragbar, weil wir über die analytische Darstellung der einzelnen, möglicherweise vorgelegten Raumcurve (m, n, r, α, β..) von vorneherein nichts Allgemeines wissen. Da werden wir nur in ganz abstracter Form das Problem der vielfachen Secanten etc. analytisch formuliren können, und es ist keine Rede davon, daß wir solche explicite Gleichungen dabei sollten erhalten können, wie vorhin die Gleichung der Polaren oder der Hesse'schen Curve. Wir verlangen darum eine Abzählungsmethode, welche von der expliciten Aufstellung analytischer Gleichungen unabhängig ist. Und das ist nun das Verdienst von Chasles (an den Zeuthen in der genannten Abhandlung anknüpft) in der Anwendung seines Correspondenzprincip's eine solche Methode entwickelt zu haben.*)

Das Princip als solches ist, wie wir schon in der Wintervorlesung ausführten, so einfach als möglich. Man habe eine Gleichung mit 2 Variabelen $f(x/y) = 0$, oder, wie wir lieber homogenmachend schreiben: $f(x_1, x_2 / y_1, y_2) = 0$, d. h. eine Gleichung zwischen dem Elemente (x) und dem Elemente (y) irgendwelcher eindimensionalen rationalen Mannigfaltigkeit, in dem x vom α^{ten}, in dem y vom β^{ten}

*) In den 60er Jahren.

Grade, also eine „Correspondenz" α, β auf der genannten Mannigfaltigkeit. Setzen wir jetzt $y = x$, d. h. $y_1/y_2 = x_1/x_2$, so giebt das für x_1/x_2 eine Gleichung vom Grade $\alpha + \beta$, die $\alpha + \beta$ Wurzeln hat, sofern sie nicht identisch verschwindet. Daher: <u>Die Correspondenz hat $(\alpha + \beta)$ Coincidenzen, sofern sie deren nicht unendlich viele hat.</u> Vorausgesetzt ist dabei, dass jede Coincidenz mit der richtigen „Multiplicität" gezählt wird. —

Das hiermit aufgestellte „Princip" als solches ist, wie wir wiederholt sagten, etwas durchaus Selbstverständliches. Der Schwerpunkt ist darauf zu legen, dass man lernt, das Princip bei geometrischen Aufgaben von steigender Complication anzuwenden.

Wir entwickeln in dieser Hinsicht zunächst einen <u>Beweis der Formel $\nu = \mu(\mu - 1)$ für Curven ohne Doppel- und Rückkehrpunkte.</u> Es seien O, P zwei beliebige Punkte der Ebene. Durch P ziehen wir einen ersten Strahl (x), der die vorgelegte Curve in μ Punkten schneidet. Indem wir jeden dieser Schnittpunkte mit O verbinden, haben wir μ von O auslaufende Hülfsstrahlen, deren jeder die Curve ausser in dem einen auf (x) gelegenen Punkte noch in $\mu - 1$ Punkten durchsetzt. Die so entstehenden $\mu \cdot (\mu - 1)$ Punkte verbinden wir nun wieder mit P durch Strahlen (y). Es correspon-

diren" dann im Strahlenbüschel P jedem (x) $\mu \cdot \overline{\mu - 1}$ Strahlen (y), und auch umgekehrt jedem (y) wie man sofort bei Rückwärtsdurchlaufung der Construction sieht, $\mu \cdot \overline{\mu - 1}$ Strahlen (x); man hat eine Gleichung:

$$F\left(x^{\mu\cdot\overline{\mu-1}},\ y^{\mu\cdot\overline{\mu-1}}\right)=0$$

zwischen den "Parametern" x und y, durch welche man die Strahlen (x), (y) innerhalb des von P aus=laufenden Büschels festlegen kann. Das giebt dann

$$2\mu\,(\mu-1)$$

„Coincidenzen", und es bleibt nun zu untersuchen, wie so bei diesem Ansatze die Coincidenzen geometrisch herauskommen können. Da ist erstlich ersichtlich, daß jedesmal eine Coincidenz von (x) mit (y) entsteht, wenn einer der μ von O auslaufenden Hülfs=strahlen die vorgelegte Curve berührt. Ist ν die Classe unserer Curve, so geschieht dies genau ν mal. Andererseits ist klar, daß die Verbindungsgerade OP eine ganze Zahl von Coincidenzen (x), (y) in sich verei=nigt. Man kann sich leicht plausibel machen, daß nicht weniger als $\mu\,(\mu - 1)$ Coincidenzen in diesen einen Strahl $\overline{OP}$ hereinfallen.

Denn jeder der μ Schnittpunkte von $\overline{OP}$ mit der Cur=ve liefert mit P verbunden einen Strahl (x), der mit al=len den $\mu - 1$ Strahlen (y) zusammenfällt, die entstehen,

wenn man den Punkt P mit irgendwelchem der $(\mu - 1)$ anderen Schnittpunkte verbindet. Giebt man die Richtigkeit der so gefundenen Multiplicität zu, so hat man

$$\nu + \mu(\mu - 1) = 2\mu(\mu - 1)$$

als Gesammtzahl der Coincidenzen und damit

$$\nu = \mu(\mu - 1),$$

was zu beweisen war. –

Man erkennt hier gleich die Schwierigkeit mit welcher die Anwendung des Princips zu tun hat. <u>Die Schwierigkeit ist immer die, die Multiplicität der einzelnen geometrisch hervortretenden Coincidenzen richtig zu zählen.</u> Die wahre Methode hierfür ist natürlich die, daß man die Gleichung $F(x/y) = 0$ in der Nähe der in Betracht kommenden Coincidenz in eine Potenzreihe entwickelt. Stattdessen wird in einfacheren Fällen eine graphische Construction der Gleichung $F(x/y) = 0$ ausreichen können, wie Zeuthen l. c. ausführt, indem er auf einen früheren Aufsatz in Bd. VI der 2ten Serie der „Nouvelles Annales" verweist. Tatsächlich sind die Geometer bei den zahlreichen Anwendungen, die sie von dem Correspondenzprincip gemacht haben, nur selten auf eine derartige genaue Discussion eingegangen. Sie haben sich vielmehr bei Abschätzung der Multiplicitäten zumeist

nur von Plausibilitätsgründen leiten lassen, vermöge deren sie in der grossen Mehrzahl der Fälle ja wahrscheinlich das Richtige getroffen haben, aber den Anforderungen an strenge Beweisführung, die man in der Mathematik doch immer aufrecht erhalten muss, nicht genügten. In der Freude, immer neue Resultate zu finden, haben sie sich um Zuverlässigkeit der Resultate vielleicht zu wenig gesorgt. Da ist dann der Rückschlag unvermeidlich. Indem dabei das Interesse für Kritik einseitig in den Vordergrund tritt, ist Gefahr, dass alle die schönen und ideenreichen Kombinationen, welche die Geometer ersonnen haben, unbillig zurückgeschoben werden, — dass die Wissenschaft ein Gebiet, welches sie freilich zuerst in vorläufiger Form erobert hatte, zum guten Teile wieder aufgiebt. Ich muss übrigens zufügen, dass die Geometer ihre aus dem Correspondenzprincip abgeleiteten zunächst nur „plausiblen" Abzählungen vielfach dadurch controlirt haben, dass sie dieselbe Zahl durch verschiedenartige Anwendung des Correspondenzprincips bestimmten. Alle diese Methoden erinnern an das inductive Verfahren der Naturwissenschaft.

Nehmen wir als zweites Beispiel für die Anwendung des Princips noch die <u>Abzählung der Wendepunkte</u> $(K = 3\mu(\mu-2))$

Wieder wählen wir einen Punkt P der Ebene und legen durch ihn einen Strahl (x). Derselbe schneidet die vorgelegte Curve in μ Punkten, in deren jedem wir die Tangente construiren, die ihrerseits die Curve in $(\mu-2)$ neuen Punkten trifft. Das sind im Ganzen $\mu(\mu-2)$ neue Punkte, welche mit P ebensoviele Strahlen (y) liefern. –

Beginnen wir mit einem solchen Strahl (y), so wird die Construction rückwärts genommen die sein, dass wir von jedem der μ Schnittpunkte, welche (y) mit der Curve gemein hat, die $\nu-2$ Tangenten legen, welche durch ihn hindurchlaufen, ohne in ihm selbst die Curve zu berühren, und dass wir dann die $\mu(\nu-2)$ Berührungspunkte der solcherweise gefundenen Tangenten mit P durch Strahlen (x) verbinden. Wir haben daher eine Correspondenz:

$$F\left(\underset{x}{\mu(\nu-2)}, \underset{y}{\mu(\mu-2)}\right)=0$$

oder, wenn wir für ν seinen Werth $\mu(\mu-1)$ einsetzen:

$$F\left(\underset{x}{\mu(\mu+1)(\mu-2)} \,\Big|\, \underset{y}{\mu(\mu-2)}\right)=0.$$

Die Correspondenz liefert $\mu(\mu-2)(\mu+2)$ Coincidenzen, und es ist nun die Frage, was diese geometrisch zu bedeuten haben. Wir werden erstlich, und das ist jetzt das Wichtige, einer jeden der K Wendungen

der Curve entsprechend eine Coincidenz haben. Wir werden zweitens eine jede der $\nu = \mu(\mu-1)$ von P an die Curve gehenden Tangenten als eine vielfache Coincidenz zu zählen haben. Die nähere Betrachtung zeigt (und das ist nun wieder der schwierige Punkt, bei dem wir uns nicht weiter aufhalten), dass diese der einzelnen Tangente beizulegende Multiplicität $(\mu-2)$ ist. Daher kommt:

$$K + \mu(\mu-1)(\mu-2) = \mu(\mu-2)(\mu+1),$$

oder

$$K = 3\mu(\mu-2),$$

was richtig ist. –

Endlich wird dann an den hiermit gewonnenen Formeln

$$\nu = \mu(\mu-1), \; K = 3\mu(\mu-2)$$

für den Fall, dass Doppel- und Rückkehrpunkte vorhanden sein sollten, die entsprechende Reduction anzubringen sein. Das ist dann abermals eine Sache, welche streng genommen nur durch Reihenentwickelung in der Nähe der einzelnen in Betracht kommenden Stelle zu erledigen ist. –

Diese Beispiele werden genügen, um die <u>Methode des Correspondenzprincips</u> nach ihrer Tragweite beurteilen zu lassen. <u>Sie leistet erstlich dies, dass</u>

sie die in Betracht kommenden algebraischen Fragen sämmtlich auf doppelt-binäre Gleichungen:

$$F(x_1, x_2 / y_1, y_2) = 0$$

reducirt; sie erspart uns sodann, diese Gleichungen in abgeschlossener Form hinzuschreiben, und verlangt nur, daß man sie in der Nähe einzelner Stellen durch geeignete Reihenentwickelungen untersuche. Vermöge der so geschilderten Methode [Mo. 8.5.92.] bestimmt nun Zeuthen in der genannten Abhandlung eine grosse Zahl von Vorkommnissen, die man bei einer Raumcurve in Betracht ziehen mag. Seine Erläuterungen sind dabei so ausfuehrlich und klar, daß ich bei den Einzelheiten hier nicht weiter zu verweilen brauche, sondern mich begnügen kann, einige Anzahlen anzugeben. Zeuthen findet: (für eine Curve ohne stationäre Punkte d. h. mit $\beta = 0$!)

die Zahl der Geraden $d(d_1, d_2, 1, 1)$ d. h. der Geraden, welche 2 feste Gerade $d_1 d_2$ schneiden und die Raumcurve zweimal treffen: $= h + \frac{1}{2} m(m-1)$,

die Zahlen der Geraden $d(d_1, 1, 1, 1)$, welche d_1 einmal und die Raumcurve dreimal (in 3 getrennten Punkten) treffen, also die Ordnung der von den dreifachen Secanten der Raumcurven gebildeten Linienfläche: $= (m-2)\left(h - \frac{n \cdot m - 1}{6}\right)$,

<u>die Zahl der einfachen Secanten $d(1,1,1,1)$</u>
$= \frac{1}{24}(12h(h-4m+11)-m(m-2)(m-3)(m-13))$; —
dann ferner beispielsweise <u>die Zahl der dreifachen Tangentenebenen der Curve</u>
$= \frac{1}{3}(-r^3+13r^2+8m-42r+y(3r-26))$ ..... etc. etc. —

Wir haben da nur Zweierlei hinzuzufügen:

1) Ein grosser Teil dieser Zahlen ist bereits vorher von <u>Cayley</u> aufgestellt worden in der wichtigen Abhandlung: <u>On skew Surfaces, otherwise Scrolls</u>, Phil. Transactions t. 153. 1863. Nur dass Cayley dort mit der unbewiesenen Voraussetzung beginnt, dass die gesuchten Zahlen rational und ganz von m und h abhängen müssen und dann die <u>Form</u> der bezüglichen rationalen ganzen Functionen durch das Studium specieller Fälle bestimmt. Die genannte Voraussetzung ist zunächst nicht anders zu stützen, als dass sie sich in den niederen Fällen bewährt hat. Ihre mathematische Richtigkeit folgt erst aus der Heranziehung des Correspondenzprinzips bei Zeuthen.

2) Es giebt besondere Fälle, in denen einzelne der bestimmten Zahlen unendlich werden, beispielsweise die Zahl der vielfachen Secanten, im Falle man die Raumcurve als Schnitt einer Linienfläche mit einer Fläche μ^{ter} Ordnung behandelt, $\mu \gtrless 3$ genommen.

Welche Möglichkeiten liegen in dieser Hinsicht vor? Werden nicht vielleicht einige der Zahlen, die man als endliche Zahlen abzählt immer unendlich? – (Was ja durch das Korrespondenzprincip als solches nicht ausgeschlossen ist). – Und wenn die Lösungen in unendlicher Zahl auftreten, kann es daneben nicht noch isolirte Lösungen geben, und wie gross ist gegebenen=falls deren Zahl? (z. B. isolirte Quadrisecanten der auf der Linienfläche gelegenen Raumcurven etc. etc.) –

Eben diese Frage nach den möglichen Ausartungen der im allgemeinen Falle erledigten Abzählungen wird später für uns besonders wichtig werden. –

Uebrigens werden wir, da wir doch einmal von bestimmten Abzählungsaufgaben bei Curven handeln, hinzufügend erläutern, wie sich der Ansatz verein=facht, sofern wir statt des Chasles'schen Correspondenz=princips das ebenfalls bereits in der Wintervorlesung genannte Cayley-Brill'sche Correspondenzprincip benutzen wollen (cf. Bd. 1 der Autographie).

Wir erklären zuerst das Princip genauer. Auf einer ebenen Curve $f = 0$ habe man zwischen 2 Punkten $x_1, x_2, x_3 (= x)$ und $y_1, y_2, y_3 (= y)$ eine (α, β) Correspon=denz, und diese sei in der Weise dargestellt, dass eine biternäre Gleichung $\Psi(x/y) = 0$

bei festgehaltenem x auf $f=0$ die Punkte y, bei festgehaltenem y auf $f=0$ die Punkte x ausschneidet. Und zwar soll das in der Weise geschehen, daß die Curve $F(x/y)=0$, – wir denken jetzt die x als gegeben, die y als laufende Coordinaten, also die „Curve der y" – die Grundcurve $f=0$ nicht nur in den Punkten y, sondern auch in dem q-fach zählenden Punkt x selbst schneidet. Man überzeugt sich dann daß die „Curve der x" – die bei festgehaltenem y durch $F(x/y)=0$ dargestellt wird –, aus der Grundcurve ebenfalls nicht nur die Punkte x ausschneidet, die dem gegebenen y entsprechen, sondern auch den Punkt y und zwar genau q fach zählend. Die so in doppelter Weise definirte Zahl q nennen wir die „Werthigkeit der Correspondenz."

Dies vorausgesetzt soll nach Cayley-Brill die Zahl der auf $f=0$ statthabenden Coincidenzen

$$\alpha+\beta+2qp$$

betragen, unter p das Geschlecht der Grundcurve verstanden!

[Di. 12.5.92.] Wir erläutern dieses Princip, indem wir zunächst bei der Curve μ^{ter} Ordnung ohne singuläre Punkte erneut die beiden Plücker'schen Formeln herstellen:

$$\nu=\mu(\mu-1),\qquad \kappa=3\mu(\mu-2).$$

Das geht hier äusserst einfach. Sei $f=0$ die gegebene

Curve. Wir nehmen natürlich an, dass der zugehörige Wert von $p = \frac{\mu-1 \cdot \mu-2}{2}$ bekannt sei. Sei dann O irgend ein Punkt der Ebene. Wir legen durch einen beliebigen Punkt x von $f=0$ die Verbindungsgerade mit O, welche $(\mu-1)$ weitere Punkte aus $f=0$ ausschneidet, die wir y nennen. Dieselbe Construction führt offenbar zu $(\mu-1)$ Punkten x zurück. Wir haben also eine $(\mu-1, \mu-1)$ Correspondenz, bei welcher der Verbindungsstrahl $\overline{x, y}$ die Rolle jener Gleichung $F(x/y)=0$ übernimmt, und bei der also $\alpha = 1$ ist. Dementsprechend giebt es

$$(\mu-1)+(\mu-1)+2\frac{\mu-1 \cdot \mu-2}{2}$$

$= \mu(\mu-1)$ Coincidenzen, d. h. Tangenten von O, was direct die Formel für ν ist. Andererseits construiren wir uns eine Correspondenz, indem wir jedem Punkte x von $f=0$ diejenigen $\mu-2$ Punkte zuordnen, in denen seine Tangente der Curve $f=0$ weiterhin begegnet ($q=2$). Einem gegebenen Punkte y entsprechen dabei $\nu-2 = \mu(\mu-1)-2$ Punkte x: diejenigen von y verschiedenen Curvenpunkte, an welche man von y aus Tangenten legen kann. Sie erscheinen als Schnitt von $f=0$ mit der ersten Polare des Punktes y, sofern wir von den 2 Schnittpunkten absehen, welche die beiden Curven im Punkte y selbst gemein haben. Dieser letztere Umstand giebt uns erneut $q=2$. Das Cayley-Brill'sche

Princip giebt jetzt $(\mu-2)+(\nu-2)+(\mu-1)(\mu-2)-2$ Coincidenzen, d.h., da $\nu-2=(\mu-1).(\mu-2)$, $3\mu(\mu-2)$ Coincidenzen und das ist in der Tat die richtige Zahl der Wendepunkte. –

Bei der grossen Leichtigkeit, mit der wir so die Formeln für ν und κ bei der singularitätenfreien Curve $f=0$ gewonnen haben, interessirt es, dieselbe Abzählung bei der mit δ Doppelpunkten und i Spitzen ausgestatteten Curve zu wiederholen. Da ändert sich dann nichts, als dass wir für p den Wert $\frac{\mu-1.\mu-2}{2}-\delta-i$ einzusetzen haben. Folgeweise wird z.B. die Zahl der von O aus an die Curve laufenden Tangenten: $\mu(\mu-1)-2\delta-2i$, während die richtige Formel für ν, wie wir wissen, $\mu(\mu-1)-2\delta-3i$ ist. Woher dieser Unterschied? Es kommt darauf hinaus, dass bei unserer Correspondenz auf $f=0$ die i Spitzen der Curve je einfach als Coincidenzen auftreten, dass also die Verbindungsgeraden von O mit den i Spitzen als Tangenten von O aus je einfach mitgezählt werden, entgegen der Auffassung, von der man bei der gewöhnlichen Abzählung von ν ausgeht.

Man kann manches für diese abweichende Auffassung sagen, wie denn bei Projection der Curve von O aus auf eine gerade Linie die Spitzen in der Tat Verzweigungspunkte liefern. Aber wichtiger für

und hier ist, daß bei der Abzählung der ν hier überhaupt eine specielle Discussion der in die Spitzen der Curve fallenden Coincidenzen nötig ist. *Auch bei der Anwendung des Cayley–Brill'schen Princips ist ein bloß mechanisches Zählen ausgeschlossen; man muß immer hinterher sich davon Rechenschaft geben, was eigentlich man abgezählt hat.* Wir erläutern hier anschließend gleich noch ein drittes Princip, durch welches man gleichfalls die hier in Untersuchung stehenden Abzählungen machen kann: *das Princip der speciellen Lage.* Dasselbe ist noch einfacher und sozusagen fundamentaler, als die beiden Correspondenzprincipe, insofern man diese selbst, wie auch das Bezout'sche Theorem, das wir zwischendurch immer benutzten, überhaupt *alle* Abzählungen, die man betrachten mag, auf dieses eine Princip gründen kann. Auf der anderen Seite wird man bei Anwendung des Princips erhöhte Sorgfalt darauf zu wenden haben, daß alle Bedingungen der Anwendbarkeit richtig eingehalten worden sind.

Hier zunächst einige Beispiele, die den Sinn des Princips verständlich machen:

1). Zwei Curven der Ordnungen μ und μ' schneiden sich in $\mu\mu'$ Punkten (Bezout's Theorem). Denn man lasse die eine Curve in μ, die andere in μ' gerade Linien zerfallen, so hat man ohne

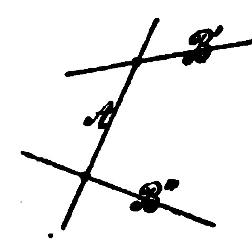
Weitere $\mu\,\mu'$ Schnittpunkte vorliegen.

<u>2). Die Classe der allgemeinen Curve μ^{ter} Ordnung ist $\mu(\mu-1)$.</u>

Zum Beweise lasse man die Curve wieder in μ gerade Linien ausarten. Alle von einem Punkte O aus an die Curve laufenden Tangenten reduciren sich dann auf die $\frac{\mu.\mu-1}{2}$ geraden Linien, welche O mit den Durchschnittspunkten irgend zweier der μ Geraden verbinden. Nun will jede dieser von O auslaufenden Verbindungsgeraden als Tangente doppelt gezählt sein, ergo. —

<u>3. Ein höheres Beispiel</u>. Wieviele gemeinsame Secanten besitzen zwei Raumcurven dritter Ordnung?

Wir bemerken vorab, daß das Strahlensystem der Secanten einer Raumcurve 3ter Ordnung ein System $(1,3)$ ist, d. h. die Ordnung 1 und die Classe 3 besitzt (durch einen beliebigen Raumpunkt geht immer <u>ein</u> Strahl des Systems, in einer beliebigen Ebene liegen <u>drei</u>). Nun kann die Curve 3. Ordnung ausarten in 3 gerade Linien, von denen eine (A) die beiden anderen (B', B'') schneidet:



Dabei zerfällt das Strahlensystem $(1,3)$ der Secanten in folgende Bestandteile:

in das System (1,1) der gemeinsamen Transversalen von $R^{3\prime}$ u. $R^{3\prime\prime}$.

in das System (0,1) der Geraden, welche die Ebene ($d\,R^{3\prime}$) ausfüllen.

in das System (0,1) " " " " " ($d\,R^{3\prime\prime}$) "

Eben diese Ausartung lässt man nun bei beiden vorgegebenen Raumcurven 3ter Ordnung, bez. ihren Secantensystemen eintreten. Dann ist die Zahl der gemeinsamen Secanten leicht abzuzählen. Nämlich: die beiden Systeme (1,1) haben *2* Gerade gemein (es giebt zu 4 beliebig im Raume gegebenen Geraden 2 gemeinsame Transversalen). Jedes der 2 Systeme (1,1) hat mit jedem der beiden anderen Systeme (0,1) je eine Gerade gemein, ... 4 Gerade. Jedes der beiden Systeme (0,1) der einen Curve hat mit jedem der beiden Systeme (0 1) der anderen Curve auch je eine Gerade gemein, – abermals *4* Gerade. Das sind im Ganzen 10 Gerade und hieraus schliessen wir vermöge des „Princips der speciellen Lage", *dass die Zahl der gesuchten Secanten auch im allgemeinen Falle 10 beträgt*. Was sollen wir hierzu sagen? Bemerken wir zunächst, dass das Princip illusorisch werden kann, sofern in dem speciellen Falle, den man betrachten will, die abzuzählende Anzahl möglicherweise unendlich wird. So wird man die Zahl der Wendepunkte einer Curve μ ter Ordnung nicht an einer Curve abzählen können, welche in μ Gerade zerfallen ist; denn da wird die Zahl eben ∞. Man wird vielmehr, wenn man eine zerfallende Curve betrachten will, nur eine solche heranziehen dürfen, deren sämmtliche

Bestandteile von höherem als 1ten Grade sind. – Aber wenn wir von den hiermit bezeichneten Fällen absehen, müssen wir sagen, *daß das Princip als solches völlig richtig ist.* Man denke sich die zu bestimmende Zahl als den Grad einer aus der vorgegebenen Problemstellung hervorgehenden Eliminationsgleichung. Wenn wir jetzt die Konstanten der Problemstellung irgendwie specialisiren, so kann besagter Grad sich dabei in der Tat nicht abändern, es kann höchstens, und das ist der Fall, wo das Princip illusorisch wird, die Eliminationsgleichung identisch verschwinden. *Nur auf 2 Punkte wird man bei Anwendung des Princips achten müssen.* Erstlich muß der besondere Fall, den man betrachten will, wirklich als Einzelfall in dem vorgegebenen allgemeinen Fall enthalten sein. So wäre es beispielsweise unstatthaft, die Raumcurve 3. Ordnung in dem letzt betrachteten Beispiel durch 3 zu einander windschiefe Gerade ersetzen zu wollen. Zweitens muß man, wie kaum hervorgehoben zu werden braucht, jede einzelne im Specialfalle sich darbietende Lösung mit der richtigen Multiplicität zählen. –

[Fr. 13.5.92] In historischer Hinsicht dürfen wir hinzufügen, daß das in Rede stehende Princip in umfassender Weise zuerst von *de Jonquières* in seiner großen Abhandlung in Crelle 66 (1866) angewandt worden ist, (Abzählung von Berührungscurven gegebener ebener Curven). Es ist dann später

von Schubert zur gleichförmigen Grundlage der ganzen „abzählenden Geometrie" gemacht worden. Man vergleiche die zahlreichen Abhandlungen Schubert's insbesondere in den mathematischen Annalen (von Bd. 10 beginnend, 1876), sowie den zusammenfassenden „Kalkül der abzählenden Geometrie" 1879 desselben Verfassers. Schubert hat dort von dem Princip der speciellen Lage bei allen möglichen Aufgaben eine ebenso kühne als erfolgreiche Anwendung gemacht. Er hat daneben (wie ich beiläufig bemerken darf) unsere geometrischen Auffassungen wesentlich erweitert, indem er zahlreiche Arten geometrischer Gebilde neu in die Betrachtung einführte. Aber freilich arbeitet er mehr mit der Phantasie als mit der Kritik, und es ist eine Notwendigkeit, die ich oft schon betont habe und hier erneut hervorheben will, daß jüngere Forscher, welche durch die strenge Schule der Functionentheorie hindurchgegangen sind, die Schubert'schen Entwickelungen aufnehmen und sicherstellen, bez. mit denjenigen Ergänzungen versehen möge, die da notwendig sich einen. —

Gemeinsam ist den dreierlei hiermit besprochenen „Abzählungsprincipien" die Tendenz, von der wirklichen Aufstellung algebraischer Formeln abzusehen und nur mit den Begriffen der Algebra zu operiren. Inzwischen ist klar, daß die algebraische Formel, sofern wir sie

aufstellen können, mehr giebt als bloss den Grad der Eliminationsgleichung. Wenn wir z. B. für die Berührungspunkte der vom Punkte $(c_1\, c_2\, c_3)$ an die Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ laufenden Tangenten die Gleichungen der Polare aufstellen:
$c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, so giebt das uns nicht nur die Zahl besagter Berührungspunkte, sondern gleich den Satz, dass dieselben ein volles Schnittpunktsystem auf $f = 0$ bilden etc. etc., insbesondere giebt es uns, wenn wir darauf Gewicht legen wollen, den Ansatz auch zur numerischen Berechnung der Berührungspunkte. Desshalb erscheint es als rationelles Problem, die blossen Abzählungsmethoden die wir seither besprachen, durch parallellaufende, analytische Entwickelungen einerseits zu stützen, andererseits zu ergänzen.
Das ist die Tendenz, welche Brill in seinen hierher gehörigen Abhandlungen verfolgt hat. Ich nenne

4 Abhandlungen über Elimination und Berührungsprobleme in den Bänden 4 u 5 der math. Annalen (1871, 72),

4 Abhandlungen über das erweiterte Correspondenzprincip – Annalen 6 (1873), 7 (1874), 31 (1887), 36 (1890).

Um doch ein Beispiel von den analytischen Formulirungen zu geben, um welche es sich dabei handelt, nehmen wir etwa das Problem der vielfachen Secanten einer Raumcurve. Wir stellen die Raumcurve etwa in der Art dar, dass wir $\rho x_i = \varphi_i(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ setzen, $i = 1, 2, 3, 4$, wo zwischen den 3 homogen auftretenden $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ irgend eine vorgebene Relation $f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = 0$

(vielleicht höheren Geschlechter) bestehen mag. Sollen nun 4 Punkte λ, μ, ν, σ der Raumcurve auf einer geraden Linie liegen, so hat man offenbar zu verlangen, daß neben den Gleichungen $f(\lambda)=0$, $f(\mu)=0$, $f(\nu)=0$, $f(\sigma)=0$

alle 3 gliedrigen Determinanten des folgenden Schemas verschwinden sollen:

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(\lambda) & \varphi_2(\lambda) & \varphi_3(\lambda) & \varphi_4(\lambda) \\ \varphi_1(\mu) & \varphi_2(\mu) & \varphi_3(\mu) & \varphi_4(\mu) \\ \varphi_1(\nu) & \varphi_2(\nu) & \varphi_3(\nu) & \varphi_4(\nu) \\ \varphi_1(\sigma) & \varphi_2(\sigma) & \varphi_3(\sigma) & \varphi_4(\sigma) \end{matrix} \right\|$$

Derartige „Matrixgleichungen" um gleich den allgemeinsten Typus zu bezeichnen, sind es immer, mit denen Brill sich beschäftigt. Dabei beschränkt er sich übrigens nicht (wie auch Schubert in seinen späteren Arbeiten) auf solche Probleme, die sich bei den Curven der Ebene oder des dreimensionalen Raums darbieten, sondern erstreckt seine Untersuchungen ebensowohl auf mehrdimensionale Räume. Es ist dies eine Verallgemeinerung der analytisch-geometrischen Fragestellungen, welche in den 70 er Jahren allgemein zum Durchbruch gekommen ist, wie wir hernach im Zusammenhange noch ausführlicher berichten müssen. —

Soviel über die Abzählungsfragen bei Raumcurven

(wobei wir ursprünglich von Cayley's Uebertragung der Plücker'schen Formeln auf Raumcurven ausgegangen waren).

Indem wir die Analogie mit den früheren Betrachtungen über ebene Curven festhalten, werden wir noch über zweierlei Fragen betreffend Raumcurven berichten wollen:

1. Schnittpunktsätze   2. Realitätsverhältnisse.

In beiderlei Hinsichten haben wir allerdings nur über Anfänge zu berichten, auch wenn wir über die Periode 1850 – 1870, die hier zunächst zur Discussion steht, wie wir vorhin auch schon taten, ein wenig hinausgreifen wollen.

Sei, um mit den Schnittpunktsätzen zu beginnen, eine C_m im Raume gegeben. Wir schneiden mit einer F_μ und bekommen $m\mu$ Schnittpunkte. Jetzt hat die Gleichung einer F_μ $M = \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Coefficienten; es giebt also ∞^{M-1} F_μ. Wir nehmen ferner an, es gäbe ϱ linear unabhängige F_μ welche durch unsere Curve gehen (welche die Curve enthalten) Die Zahl der unterschiedenen Schnittpunktsysteme von C_m und F_μ ist dann $M-1-\varrho$. Die $m\mu$ Schnittpunkte hängen also nur von $M-1-\varrho$ Parametern ab, oder anders ausgesprochen: zwischen den $m\mu$ Schnittpunkten auf C_m bestehen $m\mu+1+\varrho-M$ Bedingungen. Dies ist der allgemeine Schnittpunktsatz. Man sieht, daß es vor allen Dingen darauf ankommt, in jedem Falle die Zahl ϱ zu bestimmen.

Wir nehmen zuerst das Beispiel der vollen Schnittcurve zweier Flächen von den Ordnungen m' und m'':

$$\varphi_{m'} = 0, \quad \psi_{m''} = 0.$$

Sei hier $m' \leq m''$. So werden wir, um die Zahl ρ der F_μ zu bestimmen, welche durch die Curve gehen, unterscheiden müssen, ob:

1) $\mu < m'$, 2) $\mu \begin{cases} \geq m' \\ < m'' \end{cases}$, 3) $\mu \begin{matrix} \geq m'' \\ < m' + m'' \end{matrix}$, 4) $\mu \geq m' + m''$.

1). Im ersten Falle ist $\rho = 0$.

2). Im zweiten Falle werden alle diejenigen Flächen μ^{ter} Ordnung durch die Curve gehen, deren Gleichung ist $u\ \varphi_{m'} = 0$, unter u einen beliebigen Ausdruck vom Grade $\mu - m'$ verstanden. Daher ist hier

$$\rho = \frac{(\mu - m' + 1)(\mu - m' + 2)(\mu - m' + 3)}{1.2.3.}$$

3). Im dritten Falle treten den genannten Flächen noch analog gebildete $v\ \psi_{m''} = 0$ hinzu, wo v vom Grade $\mu - m''$ ist. Somit kommt:

$$\rho = \frac{(\mu - m' + 1)(\mu - m' + 2)(\mu - m' + 3)}{1.2.3.} + \frac{(\mu - m'' + 1)(\mu - m'' + 2)(\mu - m'' + 3)}{1.2.3.}.$$

4) Im vierten Falle hat man ebenfalls alle die Flächen $u \cdot \varphi_{m'} = 0$, $v\ \psi_{m''} = 0$. Aber unter ihnen sind jetzt eine Reihe identisch. Man erhält sämmtliche hier in Betracht kommenden Identitäten, wenn man den identisch

verschwindenden Ausdruck vom Grade $m'+m''$:

$$\varphi_{m''}\cdot\psi_{m'} - \varphi_{m'}\cdot\psi_{m''}$$

mit irgendwelchem Ausdrucke π vom Grade $\mu-m'-m''$ multiplicirt. Daher ist der unter 3) gegebene Ausdruck für ϱ jetzt um

$$\frac{(\mu-m'-m''+1)(\mu-m'-m''+2)(\mu-m'-m''+3)}{1.2.3.}$$

zu vermindern.

Uebrigens werden wir jetzt $m=m'm''$ zu setzen haben. Ich gehe nicht weiter in die Einzelheiten der Rechnung ein. Das Resultat ist,

dass für $\mu \geq m'+m''$ allemal $\frac{m'm''(m'+m''-4)}{2}-1$ Bedingungen zwischen den $m\,\mu$ Punkten bestehen, dass dieselbe Zahl auch noch richtig bleibt, wenn $\mu \geq m'+m''-3$ ist, dass sie um eine Einheit sinkt, sobald $\mu = m'+m''-4$ wird,

und dass sie weiter sinkt, wenn man zu noch kleineren Werten von μ schreitet.

Dabei beachte man, dass die Zahl $\frac{m'm''(m'+m''-4)}{2}-1$ nach unseren früheren Untersuchungen gerade das p der vollen Schnittkurve vorstellt!

Die hiermit für volle Schnittkurven gegebene Abzählungsmethode ist erst ganz neuerdings von Hilbert in seiner wiederholt genannten Abhandlung in Bd. 36 der Annalen (1890) auf beliebige Raumcurven ausgedehnt worden.*)

*) Hilbert selbst betrachtet nicht nur Raumcurven, sondern beliebig ausge-

Wir lernten bereits den Satz kennen, daß jede Raumcurve einen endlichen Modul vorstellt, d.h. daß man immer eine endliche Zahl von Flächen

$$F_1 = 0, \; F_2 = 0 \; \ldots\ldots \; F_\sigma = 0$$

so auswählen kann, daß jede andere Fläche, die durch die Raumcurve geht, sich in der Gestalt

$$F = M_1 F_1 + M_2 F_2 + \ldots\ldots M_\sigma F_\sigma$$

darstellen läßt (sodaß also, in der Sprache der Modultheorie ausgedrückt, $F \equiv 0 \;(\text{modd. } F_1, F_2, \ldots F_\sigma)$. Die $M_1, M_2, \ldots M_\sigma$ sind hier Polynome, die beim Gebrauch homogener Variabler (den Hilbert voraussetzt) natürlich dem Homogeneitätsgesetz entsprechend auszuwählen sind. Wollen wir nun abzählen, wieviele Constanten in der allgemeinsten durch die Curve gehenden F_μ noch willkürlich sind, so brauchen wir nur eine Uebersicht über die zwischen den $F_1, F_2, \ldots F_\sigma$ bestehenden <u>Syzygieen</u> zu haben. Da sind erstlich <u>Syzygieen erster Ordnung</u> d.h. identische Relationen der Form

$$X_1 F_1 + X_2 F_2 + \ldots\ldots X_\sigma F_\sigma \equiv 0,$$

dann <u>Syzygieen zweiter Ordnung</u>, nämlich syzygetische Relationen zwischen den Syzygieen erster Ordnung etc.

---

dehnte, algebraische Gebilde eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen; das bleibt hier natürlich außer Betracht.

Hierüber stellt nun Hilbert den Satz auf:

Daß die Zahl der linear unabhängigen Syzygieen erster Ordnung, wie auch der Syzygieen 2ter Ordnung etc. allemal eine endliche ist.

daß aber auch die Kette der aufeinanderfolgenden Syzygieen keine unendliche ist, vielmehr bei n homogenen Variabelen spätestens bei der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, also bei unseren Raumcurven bei den Syzygieen 3ter Ordnung abbricht.

Ich werde nun auf die nähere Abzählung der in F_μ schliesslich noch willkürlich bleibenden Constanten umso weniger eingehen, als Hilbert in dieser Hinsicht selbst wenig ausführlich ist. Nur diesen einen Satz will ich anführen (der auch schon in den später zu besprechenden Untersuchungen *Nöther's* in Bd. 93 des Journals, 1882 vorkommt):

daß nämlich bei jeder Curve C_m ohne Doppelpunkt eine endliche Gränze für den Grad μ der schneidenden Fläche $F_\mu = 0$ angegeben werden kann, jenseits deren zwischen den $m\mu$ Schnittpunkten genau p Relationen bestehen, unter p das Geschlecht der Curve verstanden.

Dieser Satz, der uns eben bereits bei den vollen Durchschnittscurven entgegengetreten war, wird uns ganz besonders interessiren, wenn wir an die Unterscheidung des vorigen Wintersemesters zwischen *rationalen ganzen Formen*

$\gamma(x_1, x_2 \cdots)$ und algebraischen ganzen Formen $\Gamma(x_1, x_2 \cdots)$ zurückdenken. Wir hatten die γ, Γ damals insbesondere für ebene Curven definirt, aber die Definition überträgt sich natürlich ohne Weiteres auf Raumcurven. Da ist denn das Verhältniß dieses, daß die γ irgendwelcher Ordnung μ zunächst specielle Fälle der Γ_μ sind. Nach dem Riemann-Roch'schen Satze bestehen aber zwischen den μm Nullpunkten einer Γ_μ, sofern wir niedere Werte von μ ausschließen, z. B. $\mu m > 2p - 2$ nehmen, genau p Bedingungen. Insofern die γ_μ specielle Fälle der Γ_μ sind, werden zwischen den $m\mu$ Nullpunkten einer γ_μ mehr als p Bedingungen bestehen müssen. Wenn daher Hilbert, Nöther behaupten, daß bei einer doppelpunktlosen C_m für die $m\mu$ Nullpunkte einer γ_μ bei hinreichend hohem μ auch gerade p Bedingungen bestehen, so bedeutet das, daß bei diesen Curven für hinreichend hohes μ die γ_μ und Γ_μ sich decken! –

Wir haben damit vorgreifend eine Reihe von Dingen erwähnt, die erst in den letzten Jahren entwickelt worden sind; wir kehren jetzt zu unserem Berichte über 1850–70 zurück und berühren noch kurz die Untersuchungen über:

Realitätsverhältniße der Raumcurven

Da ist an allgemeinen Sätzen wenig zu nennen.

Es ist vermutlich das Verdienst von *Monge*, durch Zeichnungen und Modelle ganz klar gemacht zu haben, daß eine Raumcurve allemal „Rückkehrcurve“ der von ihren Tangenten gebildeten Developpablen ist.

Folgeweise mag man untersuchen, wie sich die Verhältnisse in solchen Curvenpuncten gestalten, die entweder selbst stationär sind, oder in denen eine stationäre Ebene berührt etc. Die so entstehenden Sätze gelten unterschiedslos für alle *analytischen* Curven; bei den *algebraischen* Curven tritt vor Allem dieses hinzu, daß eine algebraische Curve immer nur aus einer *endlichen Zahl in sich selbst zurücklaufender Curvenzüge* besteht. Zum Beweise genügt es, sich zu erinnern, daß der entsprechende Satz für ebene algebraische Curven gilt, und daß die Projection einer algebraischen Raumcurve von irgend welchem Puncte aus auf eine Ebene doch wieder eine algebraische Curve ist. Diese Züge selbst mag man dann mit v. Staudt in „paare“ und „unpaare“ eintheilen. Da die unpaaren Züge jeder Ebene mindestens einmal begegnen und also auch das ∞ Ferne mindestens einmal durchsetzen, liegen sie der täglichen Gewöhnung ferner, als die paaren Züge.

Wir wenden uns gleich zur Betrachtung der niedersten Raumcurven.

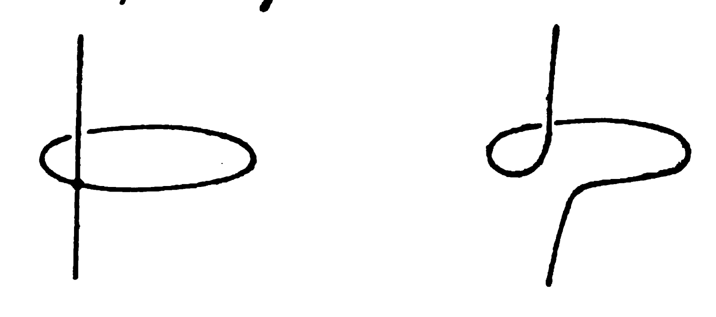
a. Raumcurven 3ter Ordnung. Deren Theorie ist besonders einfach, weil alle reellen, nicht ausgearteten Raumcurven

3ter Ordnung reell projectiv miteinander sind. Diese Curve besteht notwendig aus einem unpaaren Zuge, welcher rechts herum oder links herum gewunden sein kann. (Das ist noch einfacher, als bei den Curven 2. Ordnung: bei ihnen haben wir nullteilige und einteilige zu unterscheiden). Vom metrischen Standpunkte wird man unterscheiden, ob die Curve die ∞-ferne Ebene:

nur in einem reellen Punkte, oder
in drei getrennten reellen Punkten durchsetzt,
oder einmal schneidet und einmal berührt,
oder endlich osculirt.

Es ist dies der Fall der „cubischen Ellipse“, der „cubischen Hyperbel“ und der zweierleiartigen „cubischen Parabeln“.

Wir bekommen eine bequeme Anschauung dieser verschiedenen Curventypen, wenn wir zunächst eine ausgeartete Curve construiren, nämlich eine solche, die in einen Kegelschnitt und eine den Kegelschnitt treffende Gerade zerfällt, die also einen wirklichen Doppelpunkt darbietet, – und dann den Doppelpunkt in bekannter Weise auflösen. So giebt die Combination von Ellipse und gerader Linie die cubische Ellipse:



die Combination von Hyperbel und gerader Linie die cubische Hyperbel:

Ai. Zwecks genauer Modellirung ist es bequem, die Kegel 2ter Ordnung zu betrachten, vermöge deren sich die Curve von einem beliebigen ihrer Punkte ausprojicirt, insbesondere die bez. Kegel, welche von den ∞ fernen Punkten der Curve auslaufen, d. h. die *Cylinderflächen 2ten Grades*, auf denen die Curve liegt. Die cubische Ellipse liegt auf einem einzelnen solchen Cylinder, nämlich einem elliptischen Cylinder, die Hyperbel auf drei verschiedenen hyperbolischen Cylindern, die erste der beiden cubischen Parabeln auf einem parabolischen und einem hyperbolischen Cylinder, die zweite auf einem parabolischen Cylinder. Hiervon ist bei den Modellen Gebrauch gemacht, die ich durch *Hrn. Lange* für den Brill'schen Verlag habe anfertigen lassen. Ich würde jetzt vorziehen, lieber *freie* Modelle zu haben, d. h. einfache Darstellungen der in Betracht kommenden Raumcurven durch einen gebogenen, hinreichend widerstandsfähigen Draht. Ich fand solche Modelle im Leipziger physiologischen Institute. Die Physiologen interessiren sich für die

Raumcurven 3ter Ordnung, weil sie den sogenannten „Horopter" geben, d. h. den geometrischen Ort derjenigen Raumcurven, deren Bilder beim Sehen mit zwei Augen, irgendwelche feste Stellung der beiden Augenaxen vorausgesetzt, auf correspondirende Stellen der beiden Netzhäute fallen (cf. Helmholtz Physiologische Optik)

b. Raumcurven vierter Ordnung erster Species.

Die Raumcurven 4ter Ordnung erster Species sind von je in der darstellenden Geometrie vielfach untersucht worden. Sind $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zwei der durch die Curve gehenden Flächen 2ter Ordnung, so hat man in $\varphi - \lambda\psi = 0$ ein ganzes Büschel solcher Flächen und findet in ihm, indem man die Determinante von $\varphi - \lambda\psi = 0$ gleich Null setzt, insbesondere vier durch die Curve gehende Kegel zweiter Ordnung.

Ich will hier Besonderheiten, wie das Auftreten von wirklichen Doppelpunkten oder Spitzen bei der Curve, bei Seite lassen. Ich habe dann noch 4 Arten unserer C_4 zu unterscheiden:

1. Die nullteilige Curve. Die 4 Kegel sind reell (d. h. ein jeder hat eine reelle Gleichung), aber zwei derselben sind nullteilig.

2. Die einteilige Curve. Zwei reelle einteilige Kegel

3. Die zweiteilige, aus 2 paaren Zügen bestehende Curve.

Alle 4 Kegel sind reell und einteilig.

4) Die zweiteilige, aus zwei unpaaren Zügen bestehende Curve: Alle Kegel sind imaginär, sämmtliche durch die Curve laufende Flächen 2ter Ordnung sind einschalige Hyperboloide.

Wegen genauer Begründung dieser Aufzählung vergl. Cremona's Theorie der Oberflächen (1870) oder auch meine Vorlesung über projective Geometrie vom Sommer 1881. Man hat auch ausgeführte Modelle der genannten Curven mit den zugehörigen Developpablen und Kegelflächen (Brill'scher Verlag); die Modelle von Björling, die wir in unserer Sammlung haben, repräsentiren leider nur einzelne Fälle.

Ich nenne ferner, indem ich auf moderne Entwickelungen herübergreife.

[Di. 19.5.92.] C. Raumcurven 4ter Ordnung 2ter Species.

Es ist sehr leicht sich von einer solchen Curve im Beispiele ein ungefähres Bild zu machen. Die Curve liegt, wie wir wissen, auf eine Fläche 2ten Grades, und diese Fläche muss, sofern die Curve reell sein soll, notwendig ein einschaliges Hyperboloid sein, insofern sich ja die Curve, gegen die beiden Schaaren der Erzeugenden der Fläche ungleichartig verhalten soll. Andererseits giebt die Curve irgendwie auf eine Ebene projicirt eine ebene Curve

4ter Ordnung mit 3 Doppelpunkten. Man zeichne jetzt eine derartige ebene Curve und füge einen Kegelschnitt hinzu, der die Curve 4 mal berührt (Die Hyperbel in der nebenstehenden Figur). Es genügt jetzt diesen Kegelschnitt als den scheinbaren Umriss eines einschaligen Hyperboloids aufzufassen und die einzelnen Stücke, in welche unsere Curve 4. Ordnung durch die 4 Berührungspunkte mit dem Kegelschnitt zerfällt, abwechselnd auf die Vorderseite und die Rückseite dieses Hyperboloids zu verlegen (wie dies in der Figur durch stärkeres und schwächeres Ausziehen der Curvenstücke angedeutet ist). Wir erhalten so natürlich nur erst ein Beispiel einer Raumcurve 4. Ordnung zweiter Species. Es würde darauf ankommen, alle möglichen Gestalten, die eine solche Raumcurve darbieten kann, von dem genannten Ansatze aus zu erschöpfen. In dieser Hinsicht sind die Modelle zu nennen, welche Hr. Rohn ganz neuerdings (1891) im Brill'schen Verlage hat erscheinen lassen; dieselben repräsentiren sowohl das die Curve tragende, einschalige Hyperboloid, wie insbesondere die zur Curve gehörige developpable Fläche durch gespannte Fäden.

Mit den sogenannten Fällen a, b, c sind wohl alle algebraischen Raumcurven erschöpft, die man bisher in gestaltlicher Hinsicht genauer untersucht hat. Allgemeine Bemerkungen zur Theorie der gestaltlichen Verhältnisse der algebraischen Raumcurven sind mir aus neuerer Zeit noch von Hilbert, Franz Meyer und Brill bekannt; ich schliesse bez. Bericht gleich hier an.

Hilbert (Math. Annalen 38) knüpft an die Arbeit von Harnack an, über die wir auf p 251 der Wintervorlesung berichteten, sowohl dem Resultate nach – Harnack zeigte, dass die Zahl der unterschiedenen Züge einer ebenen Curve die Zahl $p+1$ erreichen, aber nicht überschreiten kann –, als auch der Methode nach. Harnack stellt durch Einführung bestimmter, der geometrischen Interpretation zugänglicher Gleichungsformen die Curven, welche er als existent nachweisen will, immer wirklich her. – Er untersucht nun insbesondere die Raumcurven vom Maximalgeschlecht. Wir müssen dabei vorgreifend berichten, dass nach einem von Halphen im Jahre 1870 in den Comptes Rendus ausgesprochenen Theoreme (C. R. t. 70) das Geschlecht einer nicht ebenen Raumcurve m^{ter} Ordnung nur bis $\frac{(m-2)^2}{4}$, bez. $\frac{(m-1)(m-3)}{4}$ steigen kann, und dass eine Curve, welche dieses Maximalgeschlecht erreicht, notwendig auf einer Fläche 2ten Grades liegt. Hilbert nimmt $m>5$ und unterscheidet die Fälle, wo m

$$= 4\mu, \quad 4\mu+1, \quad 4\mu+2, \quad 4\mu+3.$$

Er findet dann, daß die Curve allemal wirklich $p+1$ reelle Züge haben kann, und daß die Zahl ihrer unpaaren Züge insbesondere zu

$$2\mu-2\,,\quad 2\mu-1\,,\quad \sigma\,,\quad 2\mu-1$$

ansteigen kann. Daneben verschiedene interessante Einzelheiten auch über die Gestalt der ebenen Curven. –

Franz Meyer unternimmt in den Göttinger Nachrichten von 1891 jene Relation zwischen den Singularitäten ebener Curven über die auf p. 231 ff. der Wintervorlesung berichtet ist, auf Raumcurven zu übertragen. Die Relation für ebene Curven lautet, sofern wir das Auftreten singulärer Punkte hier ausschließen wollen

$$w' + 2t'' = m(m-2)\,;$$

hier ist w' die Zahl der reellen Windungen, t'' die Zahl der reellen isolirten Doppeltangenten. Fr. Meyer findet nun dementsprechend für singularitätenfreie Raumcurven m^{ter} Ordnung nur eine Congruenz:

$$w' + d' + t' - 2T'' \equiv b \pmod{4}.$$

Hier bezeichnet (in leicht verständlicher Abkürzung)

w' die Zahl der reellen Ebenen α^4,
t' die Zahl der reellen Ebenen $\alpha^3\beta^2$,
T'' die Zahl der reellen Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, welche die Curve in nur einem reellen Punkte berühren,
d' die Zahl der reellen Geraden $\alpha^2\beta$,

b aber ist, für alle Curven m^{ter} Ordnung, welche derselben

Species angehören, d. h. welche durch continuirliche Ände-
rung der Parameter ineinander übergeführt werden kön-
nen, eine im Allgemeinen nicht näher bekannte Constante.
Die Arbeit von *Brill*, welche hier zu nennen ist, datirt be-
reits vom Jahre 1881 (Ann. Bd. 18) und wird hier nur da-
rum an letzter Stelle aufgeführt, weil sie diejenige Frage-
stellung bei den Raumcurven betrifft, über die man am
wenigsten weiss, trotzdem sie dem unmittelbaren Inte-
resse der Anschauung besonders nahe liegt. Geschlossene
Curvenzüge können mit sich selbst oder miteinander
ein- oder mehrfach *verschlungen* sein. Das ist ein Gegen-
stand, der im Sinne der Analysis situs (der Topologie)
vielfach untersucht wurde, so insbesondere von Tait in den
Edinburgh Transactions von 1879, 1884, 1886; ausführ-
lichere Literaturnachweise findet man bei *Dyck* in
Ann. 32, p. 459 - 460 zusammengestellt. Wie aber stellen
sich diese Dinge, sofern man insbesondere algebraische
Curven in Betracht zieht? Man mag zunächst bemer-
ken, dass die rein gestaltlichen Untersuchungen, auf die
ich gerade Bezug nahm, noch einer Erweiterung bedür-
fen, ehe sie für die Frage der betr. Eigenschaften algebra-
ischer Curven als Grundlage dienen können. Sie be-
ziehen sich nämlich durchweg auf Curvenzüge, die
im Endlichen geschlossen sind; es wird also notwendig

sein, sie auf Curvenzüge auszudehnen, die das Unendlichweite durchsetzen, insbesondere auf unpaare Curvenzüge. Brill hat nun l. c. eine erste hier sich darbietende Frage erledigt. Eine ebene Curve 4ter Ordnung mit 3 Doppelpunkten kann als Projection einer Raumcurve gedacht werden, welche eine einfache Verschlingung mit sich selbst darbietet, wie nebenstehende Figur aufweist. Welches ist die niederste algebraische Raumcurve, die eine solche Projection aufweist? Brill findet, daß dies eine (natürlich rationale) Curve fünfter Ordnung ist; man hat dieselbe von irgend welchem Punkte des einen Curvenzugs, den sie überhaupt besitzt, zu projiciren, also etwa, wenn wir diesem Curvenzuge eine Asymptote geben wollen (eine hat er mindestens), von seinem einen unendlich fernen Curvenpunkte aus. Man kann aber unsere Figur auch erhalten, indem man eine rationale Curve sechster Ordnung, die einen isolirten Punkt besitzt, von eben diesem Punkte projicirt, und hat dann den Vortheil, daß man die Raumcurve ganz im Endlichen gelegen annehmen kann. —

Bei den hiermit besprochenen Arbeiten von Hilbert, Fr. Meyer, Brill handelt es sich, wie man sieht, übereinstimmend um specielle Fragen. Um so erwünschter

wird es sein, wenn wir weiterhin, im Verfolg der Riemann'schen Theorie, wie ich hoffe, dazu kommen werden, wenigstens einiges Allgemeine über die realen Gestalten algebraischer Raumcurven in Erfahrung zu bringen. Aber vorher müssen wir unser Referat über die seitherige Entwickelung der Theorie der Raumcurven noch erst zu Ende bringen.

Ich wende mich diesbezüglich jetzt zur

II. Zweiten Periode (von 1870 an)

Zwei Ideen sind es, welche dieser zweiten Periode ihre Signatur gegeben haben.

erstlich die Tendenz, welche wesentlich auf Clebsch zurückgeht, die Theorie der Curven mit der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen in Verbindung zu setzen (Clebsch 1863, Journal Bd. 64: Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie), zweitens das Heranziehen mehrdimensionaler Anschauungsweisen (wo dann ebene Curven und Raumcurven nur als Anfangsglieder der unendlichen Kette von Curven in Räumen von steigender Dimensionzahl erscheinen).

Clebsch selbst hat seine vorbezeichnete Tendenz nur nach ihren allgemeinen Umrissen skizzirt (vergl. insbesondere auch die Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan, 1866) und seiner Schule gewissermaßen als Erbschaft hinterlassen. Die grundlegende Ausführung der-

selben erfolgte erst 1873 durch Brill u. Nöther (zuerst in den Göttinger Nachrichten, dann in Bd. 7 der Annalen).

Wir haben auf die bezügliche Abhandlung *) bereits im Winter vielfach Bezug genommen, indem sich dieselbe ja keineswegs auf Raumcurven beschränkt, vielmehr diese nur mehr beiläufig berührt; trotzdem wollen wir dieselbe bei ihrer hervorragenden Wichtigkeit hernach im Zusammenhange ausführlich besprechen. Vorher aber gedenken wir der Sätze (auf die wir soeben auch schon Bezug nahmen), die Halphen in den Comptes Rendus von 1870 (Bd. 70) sowie 1873-74 in Bd. 2 des Bulletin der Société Mathématique veröffentlicht hat. Es handelt sich da zunächst um das Maximalgeschlecht der Raumcurven m^{ter} Ordnung.

Wir bemerkten schon, dass dasselbe $\frac{(m-2)^2}{4}$, bez. $\frac{(m-1)\cdot(m-3)}{4}$ beträgt (jenachdem m gerade oder ungerade ist) und dass eine C_m, welche dieses Geschlecht besitzt, notwendig auf einer F_2 liegt. Halphen teilt auch Gränzen mit, welche das Geschlecht einer C_m nicht überschreiten kann, wenn durch die C_m keine niedere Fläche durchgehen soll, als eine Fläche 3ter Ordnung, oder eine Fläche 4ter Ordnung etc., (doch bedürfen diese Sätze wohl noch der Controle). Er bemerkt ferner, dass die Constantenzahl einer C_m, im Allgemeinen

---

*) Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie.

4 m beträgt, – ein merkwürdig eleganter Satz. Er hebt endlich hervor, daß zwei C_m, welche zu dem nämlichen Geschlecht gehören (dieselbe Zahl scheinbarer Doppelpunkte besitzen) doch noch grundverschieden sein können. So hat man zweierlei C_9 mit 18 Doppelpunkten, eine jede mit 36 Constanten, nämlich die volle Durchschnittscurve zweier Flächen dritter Ordnung und den Restschnitt einer Fläche 2ten und 6ten Grades, die 3 windschiefe Gerade gemein haben. Wir nennen hier diese Sätze, weil wir Gelegenheit haben werden, auf sie vom Riemann'schen Standpunkte zurückzukommen; wie weit Halphen in jener Zeit die Riemann'schen Entwickelungen selber durchgedacht hat, ist nicht recht zu sehen.

[Fr. 20.5.92.] Nun zu der Abhandlung von <u>Brill u. Nöther!</u>

Wir rubriciren die in ihr enthaltenen Entwickelungen unter dreierlei Kategorieen:

1) Verschmelzung der Riemann'schen Sätze über algebraische Functionen mit den geometrischen Constructionen an der Curve.

Nehmen wir, um die Ideen zu fixiren, gleich eine Curve des dreidimensionalen Raumes $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$; der Ausdruck

$$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4}{x_4}$$

stellt auf der Curve eine 4gliedrige lineare Schaar m wertiger Functionen mit gemeinsamen Unendlichkeitsstellen dar. Aber er verschwindet in den n Punkten, in denen die Curve von der Curve $c_x = 0$

geschnitten wird. Daher sind die sämmtlichen Gruppen von je m Punkten, in denen die Curve von einer beliebigen Ebene geschnitten wird „aequivalent". Umgekehrt: hat man irgend eine 4 gliedrige lineare Schaar algebraischer Functionen. $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4$, so kann man zugehörige Raumcurven construiren, deren ebene Schnitte mit den Nullstellen der einzelnen Functionen $\sum c_i f_i$ coincidiren; man hat einfach $\frac{x_1}{x_4} = f_1, \frac{x_2}{x_4} = f_2, \frac{x_3}{x_4} = f_3$ zu setzen. Alle die ∞ vielen Raumcurven, welche man so aus derselben Riemann'schen Fläche erhält, erscheinen uns als coordinirt. Jede einzelne versinnlicht uns, sofern wir sie unter projectiven Gesichtspunkten betrachten also die unendlich ferne Ebene nicht auszeichnen wollen, eine der „dreifach ausgedehnten linearen Schaaren aequivalenter Punktgruppen", die auf der Riemann'schen Fläche existiren. Für die Mannigfaltigkeit dieser Raumcurven ist natürlich der Riemann-Roch'sche Satz fundamental.

Dies ist, an dem Beispiele der Raumcurven erläutert, der Grundgedanke, der die ganze Brill-Noether'sche Arbeit durchzieht, und wir können hier nur extra noch dieses hinzufügen, daß Brill-Noether von der entsprechenden Auffassungsweise bez. Curven, die in höheren Räumen gelegen sind, noch keinen expliciten Gebrauch machen, vielmehr vorziehen, statt von den ebenen Schnitten einer solchen Curve von einer „q fach ausgedehnten, linearen Schaar aequivalen-

ter Punktgruppen von je 2 Punkten, g_2^1, auf dem zu Grunde gelegten algebraischen Gebilde zu sprechen. Dies lässt sich aber sofort abändern, wie dies beispielsweise Castelnuovo im 24. Bande der Atti di Torino, 1889, ausgeführt hat.

Ich erwähne das schon hier, weil die mehrdimensionale Ausdrucksweise und die damit parallel gehende Auffassungsweise für denjenigen, der sich einmal daran gewöhnt hat, in der Tat sehr bequem ist.

Wollen wir mit Hülfe des bezeichneten Grundgedankens doch gleich die Mannigfaltigkeit der Raumcurven m^{ter} Ordnung, die es giebt, für den einfachsten Fall abzählen. Dieser einfachste Fall ist derjenige, wo $m > 2p-2$. Wir wissen dann nämlich aus dem Riemann-Roch'schen Satze mit Sicherheit, dass jede einzelne G_m auf einer beliebigen Riemann'schen Fläche vom Geschlecht p, einer wohlbestimmten g_m^{m-p} aber keiner höheren linearen Schaar von Gruppen G_m angehört. Nun giebt es an sich auf der Riemann'schen Fläche ∞^m Gruppen G_m. Dieselben gruppiren sich jetzt also zu ∞^p linearen Schaaren g_m^{m-p}. Es ist nun die Frage, wieviele g_m^3 unter diesen ∞^p g_m^{m-p} enthalten sein mögen. Im Raume von $(m-p)$ Dimensionen ist ein dreifach ausgedehnter linearer Raum immer durch 4 Punkte festgelegt, aber den einzelnen dieser Punkte darf man nicht mit $(m-p)$ Constanten, sondern nur mit

$(m-p-3)$ Constanten in Rechnung stellen, da er ja auf ∞^3 Weisen bewegt werden kann, ohne daß sich der R_3 ändert. Solcherweise ergiebt sich als Zahl der R_3 im R_{m-p}: $\infty^{4(m-p-3)}$ und als Zahl der $G_m^{(3)}$ auf unserer Riemann'schen Fläche: $\infty^{p+4(m-p-3)} = \infty^{4m-3p-12}$. Eine jede dieser $G_m^{(3)}$ liefert nun für die projective Auffassung eine Raumcurve, oder, wenn wir die besondere Lage der Curve gegen das zu Grunde zu legende Coordinatensystem mit in Betracht ziehen wollen, sie liefert ∞^{15} individuell verschiedene Raumcurven (∞^{15} ist die Zahl der Collineationen die es im R_3 giebt, oder, was dasselbe ist, die Zahl der Constanten, von welcher das allgemeine projective Coordinatensystem im R_3 abhängt). Daher bekommen wir jetzt im Ganzen aus der als gegeben angesehenen Fläche vom Geschlechte p $\infty^{4m-3p+3}$ Raumcurven m^{ter} Ordnung. Aber nun beachte man, daß die Zahl der unterschiedenen R. Flächen des Geschlechtes p ∞^{3p-3} ist ($3p-3$ ist die Zahl der Riemann'schen „Moduln")

Es giebt's im Ganzen gerade ∞^{4m} Raumcurven m^{ter} Ordnung vom Geschlechte p, was zu beweisen war.

Man beachte zugleich, daß dieselben hier (wo wir $m > 2p-2$ genommen hatten) alle eine einzige Familie bilden. Denn die ∞^{3p-3} Riemann'schen Flächen des Geschlechtes p bilden, wie wir wissen, ein Continuum, und die G_m, wel-

che man auf der einzelnen dieser Flächen construiren kann, und wieder. —

<u>4). Neue Grundlegung der Riemann'schen Sätze von der Theorie der ebenen Curven aus.</u>

Brill – Nöther beginnen in ihrer Arbeit explicite gar nicht mit den Riemann'schen Definitionen, sondern gleich mit einer ebenen Curve: $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, definiren das, was sie eine <u>adjungirte</u> Curve $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ nennen (cf. p. 138, 223–225 der Wintervorlesung), und entwickeln nun für die Quotienten zweier adjungirter φ derselben Ordnung: $\varphi'_\mu(x_1, x_2, x_3) : \varphi''_\mu(x_1, x_2, x_3)$, sofern er eine „Function" auf $f = 0$ vorstellt, auf rein algebraischem Wege Sätze, welche den Riemann'schen Theoremen von der algebraischen Function, die auf der durch $f = 0$ definirten Riemann'schen Fläche existiren, genau parallel laufen. Insbesondere werden die Integrale $\int \varphi_{n-3}(x_1, x_2, x_3) \frac{(c\, x\, dx)}{\Sigma c_i\, df/dx_i}$ mit Riemann's überall endlichen Integralen übereinstimmen (immer vorausgesetzt, daß die φ „adjungirt" sind). —

Auf eine kritische Würdigung dieses Ansatzes werden wir sogleich noch eingehen. Hier bemerken wir nur, was wir im Wintersemester schon gelegentlich berührten, daß derselbe, sofern man die Uebereinstimmung mit den Riemann'schen Sätzen herauskehrt,*) ein neues

*) die Brill – Nöther zwar überall supponiren aber nirgends eigentlich ableiten.

Theorem enthält, dahingehend, dass die algebraischen Functionen Riemann's auf $f=0$ mit denjenigen Functionen, die man durch Quotienten adjungirter χ definiren kann, direct identisch sind. Quotienten nicht adjungirter χ werden auf $f=0$ solche algebraische Functionen geben, wie wir sie auf p 106, 110,-112 der Wintervorlesung als „gebundene" Functionen bezeichneten. vergl. hierzu insbesondere den Excurs auf p 286-289 daselbst.

Hier bietet sich naturgemäss die Frage, wie [Mo. 23.5.92.] denn die allgemeinen algebraischen Functionen auf einer Raumcurve durch rationale Functionen der Coordinaten dargestellt werden mögen? Man kann da an die Entwickelungen anknüpfen, welche Nöther in Bd. 8 der math. Annalen (1874) (in einer 2ten Abhandlung über das eindeutige Entsprechen mehrfach ausgedehnter, algebraischer Gebilde) über die Darstellung der zur Curve gehörigen Integrale erster Gattung giebt. Der allgemeine Satz scheint folgender zu sein. Sei unsere Raumcurve der volle oder teilweise Schnitt von $\varphi'=0$, $\varphi''=0$. Wir haben dann möglicherweise singuläre Punkte auf der Raumcurve selbst, dann aber auch noch diejenigen Punkte als Singularitäten des Schnittes, in denen sich unsere Raumcurve mit dem etwaigen Restschnitte unserer beiden Flächen begegnet. Unter c', c'' zwei beliebige Raumpunkte verstanden, bilden wir uns

jetzt die Functionaldeterminante $(c'c''\varphi'\varphi'')$. Eine Fläche $\gamma(x_1 x_2 x_3 x_4)=0$ werden wir dann zur Raumcurve <u>adjungirt nennen</u>, wenn der Quotient $\left(\frac{c'c''}{\varphi'\varphi''}\right)$ entlang der Curve in allen singulären Puncten des Schnittes endlich bleibt.

Und es wird dann wieder der Satz gelten, daß die Gesammtheit der auf der Raumcurve existirenden algebraischen Functionen sich mit der <u>Gesammtheit der Quotienten adjungirter γ deckt.</u>

3). Wirkliche Inangriffnahme des Problems der Specialgruppen.

Was eine „Specialgruppe" ist, definirten wir bereits im vorigen Winter: eine solche Gruppe G_Q von Q Puncten des Gebildes, für welche σ linear unabhängige Differentiale erster Gattung verschwinden, wo $\sigma > 0$. Aus dem Riemann-Roch'schen Satze folgte damals, daß eine solche G_Q einer $Q-p+\sigma$ fach ausgedehnten linearen Schaar „aequivalenter" G_Q, also einer $G_Q^{Q-p+\sigma}$ angehört. Ferner lernten wir, daß mit jeder G_Q eine G_R so verbunden ist, daß $Q+R=2p-2$, $2(\sigma-\tau)=R-Q$.

Dieser Satz ist zum ersten Male bei Brill und Nöther allgemein ausgesprochen, wir nannten ihn darum den Brill-Nöther'schen Reciprocitätssatz. Eine Folge desselben ist, daß jede Specialfunction, d. h. jede Function, welche in den Puncten einer G_Q mit $\sigma > 0$ un-

endlich wird, sich als Quotient zweier linearer Verbindungen der dw ausdrückt. Ferner entwickeln B. N. hieran anschliessend, welches die Maximalwerte von q und Q sind, die bei einer Specialschaar G_Q^q nebeneinander auftreten können. Aber mehr als dieses: sie geben für derartige Maximalschaaren auch Anzahlbestimmungen.

Wir werden das Alles durch Einführung mehrdimensionaler Ausdrucksweisen wieder sehr beleben. Wir setzen die homogenen Coordinaten $\varphi_1, \ldots \varphi_p$ eines R_{p-1} den p linear unabhängigen überall endlichen Differentialen $dw_1, \ldots dw_p$ der Riemann'schen Fläche proportional und erhalten in bekannter Weise die „Normalcurve C_{2p-2} der φ im R_{p-1}". Q Punkte, welche eine „Specialgruppe" mit dem „Ueberschuss" σ bilden, liegen auf σ linear unabhängigen „Ebenen" dieses Raumes, bilden also die Q Schnittpunkte der C_{2p-2} mit einem linearen $R_{p-1-\sigma}$. Jede Ebene, welche durch Q Punkte hindurchgeht, schneidet die C_{2p-2} in weiteren R Punkten, deren Ueberschuss τ durch den Reciprocitätssatz geregelt wird; dieselben sind ihrerseits in einem $R_{p-1-\tau}$ enthalten. Erweitert man die G_Q zur linearen „Vollschaar" aequivalenter Punktgruppen $G_Q^{Q-p+\sigma}$ und die G_R zur Vollschaar $G_R^{R-p+\tau}$,

so ist das Sachverhältniß dies, daß jede G_{α} der ersteren Schaar mit jeder $G_{\bar{\alpha}}$ der anderen Schaar in einer Ebene liegt. Denn $\bar{\alpha}-p+\sigma$ ist $=\tau-1$, $\alpha-p+\tau=\sigma-1$. Die Aufsuchung irgend welcher $G_{\alpha}^{\bar{\alpha}-p+\sigma}$ kann daraufhin entweder direct in Angriff genommen werden, oder so, daß man die complementäre $G_{\bar{\alpha}}^{\alpha-p+\tau}$ sucht.

So gefaßt hat, wie man sieht, das Problem der Specialgruppen die größte Aehnlichkeit mit dem Problem der vierfachen Secanten, wie wir es früher bei den gewöhnlichen Raumcurven studirten. Diese ganze Analogie hervorgekehrt zu haben und dann mit Hülfe der geometrischen Abzählungsprincipien geradezu die Zahl bestimmter Specialgruppen festgelegt zu haben, das ist jedenfalls ein besonderes Verdienst der Arbeit von Brill & Nöther. Uebrigens erscheinen die betreffenden Zahlen l.c. noch ohne Beweis; die Beweise hat Brill erst nachträglich in seinen bereits genannten Abhandlungen über das erweiterte Correspondenzprincip in Math. Ann. Bd. 31, 36 veröffentlicht. Man kann hier alle die Bemerkungen wiederholen, die wir früher beim Problem der einfachen Secanten machten. Mögen die Abzählungen im Allgemeinen richtig sein, wie man ja wohl nicht bezweifeln kann, obwohl ein genauerer Nachweis fehlt *), so giebt es jedenfalls specielle Fälle, wo sie unrichtig werden, wo statt der abgezählten endlichen

*) nämlich im Sinne von I p 81-82.

Anzahlen unendlich <u>grosse vorhanden</u> sind, kurzum, wo <u>aussergewöhnliche Specialgruppen</u> auftreten. Beispiele für solche Möglichkeiten giebt beispielsweise die Arbeit von <u>Kraus</u> (Schüler von Brill) in Bd. 16 der math. Ann., 1879.

Offenbar wäre es äusserst wichtig, <u>alle in</u> dieser Hinsicht möglichen Verhältnisse erschöpfend aufzählen zu können. — Ich habe diesem Referate über die Brill-Nöther'sche Arbeit nur noch wenige Bemerkungen hinzuzufügen. Die Brill-Nöther'sche Arbeit vertritt in besonders typischer Weise den Grundsatz, den Clebsch seinen Schülern hinterlassen hat, und der je länger je mehr zu allgemeiner Anerkennung gelangt ist, dass bei der Untersuchung der algebraischen Gebilde geometrische Construction & functionentheoretische Begriffsbildung Hand in Hand gehen müssen. Die Functionentheorie hat überall da den Vorrang, wo es sich um eine einzelne unabhängige Variable handelt; die Geometrie tritt ergänzend ein, sobald es gilt, mehrere Variable nebeneinander zu betrachten.

Die Functionentheorie giebt das eigentliche Fundament; die geometrische Betrachtung versieht uns mit einer gewissen Gewandheit, complizirte Verhältnisse von ihrer einfachsten Seite aufzufassen. Unter den Functionen, welche hierbei benutzt werden, stehen natürlich die

algebraischen Funktionen und ihre Integrale voran; ich will hier aber doch beiläufig erwähnen, daß immer mehr die Lösungen linearer Differentialgleichungen, bez. ihre Umkehr, die automorphen Funktionen, in die Betrachtung eintreten. Und wenn ich meiner eigenen Auffassungsweise hier Ausdruck geben darf, so geht die dahin, daß auf die Dauer die Verbindung von Geometrie und Funktionentheorie nicht ausreicht, daß als dritte Verbündete die Zahlentheorie hinzutreten muß. Ich darf hier auf meine von Fricke bearbeiteten Vorlesungen über Modulfunktionen verweisen: die Art und Weise, wie dort die genannten drei Gebiete ineinander greifen, scheint nur die allgemeine Richtung zu bezeichnen, in der sich jetzt diese Teile der modernen Mathematik entwickeln. In Uebereinstimmung mit den Tendenzen, die z. Z. in anderen Wissenschaften hervortreten, scheint es im Augenblicke auch bei der Mathematik mehr darauf anzukommen, die eine Zeit lang getrennten Disziplinen in ihrer Wechselbeziehung zur Geltung zu bringen, als jede einzelne derselben für sich weiter zu entwickeln. Doch kann ich mir denken, daß in ein-zwei Jahrzehnten die Bewegung ihren Sinn wieder wechseln wird.

Das Vorstehende geht darauf hinaus, daß ich das Brill-Nöther'sche Programm nach seiner positiven Seite völlig

acceptire und in meiner Weise weiter auszugestalten be-
müht bin. Anders ist es mit der negativen Seite ihrer
Tendenz, mit der Zurückweisung der auf Riemann zu-
rückgehenden Begriffsbildungen. Ich erwähnte schon, daß
Brill u. Nöther die <u>Definition</u> der algebraischen Functio-
nen als derjenigen auf dem Gebilde eindeutiger Functio-
nen, welche nirgendwo wesentlich singuläre Punkte haben,
umgehen und stattdessen <u>Quotienten gleich hoher ad-
jungirter $\varphi(x_1, x_2, x_3)$</u> als algebraische Functionen <u>bezeich-
nen</u>. Im Zusammenhange damit erscheint das p bei ihnen
nur als die Anzahl gewisser adjungirter φ. Ich kann
nicht leugnen, daß mir hier ein Rückschritt gegen
Riemann's ursprüngliche Auffassung vorzuliegen
scheint. Es ist ja garnicht nöthig, daß wir als Grund-
lage der ganzen Theorie die Riemann'schen Existenz-
sätze einführen, immer ist es doch eine sehr wesent-
liche Sache, daß wir die algebraischen Functionen
unabhängig von ihrem analytischen Ausdrucke
charakterisiren, daß wir insbesondere die Bedeutung
der Zahl p als einer Zahl verstehen, die den "Zusammen-
hang" des algebraischen Gebildes mißt. Indem Brill-
Nöther und die Geometer, welche sich an dieselben an-
schließen, das p anders einführen, kommt bei ihnen
der Satz von der Unveränderlichkeit des p gegenüber ein-

deutigen Transformationen als etwas Beiläufiges heraus, was merkwürdigerweise statt hat, nicht aber, wie bei Riemann als etwas durchaus Selbstverständliches.

Nach der anderen Seite hat der Ersatz der algebraischen Funktionen durch die Quotienten gleich hoher adjungirter φ allerdings sein Gutes gehabt. Vermöge desselben ist es nämlich gelungen, *die Theorie der algebraischen Funktionen von der Curve auf mehrfach ausgedehnte Gebiete, wie Flächen etc., zu übertragen.*

Das hätte bei anderem Ausgangspunkte noch erst Untersuchungen über Funktionen mehrerer complexer Variabler, über Zusammenhangsverhältnisse mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten etc. verlangt, die noch nicht abgeschlossen sind. Ich nenne hier kurz die Hauptpunkte dieser neueren Theorie.

1. Den Anfang macht auch hier *Clebsch*; der in den Comptes Rendus von 1868 bemerkte, dass man bei einer algebraischen Fläche $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, (die keine ausserordentlichen Singularitäten besitzen soll) *überall endliche Doppelintegrale* construiren kann, deren Anzahl p notwendig bei eindeutiger Transformation constant bleibt. So haben wir denn wieder eine invariante Zahl, das „Flächengeschlecht". Nach der Ausdrucksweise von Brill u. Nöther bezeichnet sie

der Zahl der linear unabhängigen Flächen $(n-4)^{ter}$ Ordnung, die zur gegebenen Fläche n^{ter} Ordnung „adjungirt" sind.

2) Hieran reihen sich dann vor allen Dingen die Nöther'schen Untersuchungen in Bd. 2 und 8 der Mathematischen Annalen (1869, 1874): „Ueber das eindeutige Entsprechen mehrfach ausgedehnter, algebraischer Gebilde." Nöther zieht bei den Flächen etc. auch höhere Singularitäten in Betracht. Insbesondere aber zeigt er, dass bei diesen Gebilden mehrere Geschlechtszahlen existiren. So bei den Flächen, d. h. den algebraischen Gebilden von 2 Dimensionen, deren zwei. Die erste p ist das Flächengeschlecht von Clebsch, die andere, die wir p' nennen wollen, mag etwa als die Zahl der beweglichen Schnittpunkte definirt werden, welche zwei adjungirte Flächen $(n-4)^{ter}$ Ordnung miteinander und mit $f=0$ gemein haben. Wir übergehen die vielfachen Ausführungen, welche Nöther in der Folge hier angeschlossen hat und erwähnen nur, dass er in den Berliner Sitzungsberichten von 1886 die Zahl der „Moduln", d. h. der durch eindeutige Transformation unzerstörbaren Constanten bestimmt, welche eine Fläche (p, p') besitzt; dieselbe ist gleich $10(p+1)-2p'$.

3) Aufgenommen wurden diese Untersuchungen

insbesondere von Picard. Man vergleiche dessen zusammenfassende Arbeit in dem Journal des Mathematiques (4) t. V: „Sur la theorie des fonctions algébriques de 2 variables indépendantes" 1889.

4). Andererseits haben die Italiener einen Teil der in Betracht kommenden Probleme in geometrischer Form weitergeführt. Nehmen wir an, daß eine Fläche oder ein sonstiger (in einem höheren Raume gelegenes) zweidimensionales, algebraisches Gebilde, sich eindeutig auf die Ebene abbilden lasse, so werden wir auf letzterer als Bild der ebenen Schnitte der Fläche ein lineares Curvensystem erhalten. An diesem Curvensysteme werden uns dann von dem hier gegebenen Standpunkte aus diejenigen Eigenschaften interessiren, welche bei beliebiger birationaler Transformation (Cremona-Transformation) der Ebene unverändert bleiben mögen. Auf derartige Fragen zielen in der Tat die Untersuchungen der italienischen Geometrie Bertini, Caporali, Castelnuovo, Guccia, Jung, Martinetti ab. Andererseits giebt es Flächen, deren Theorie sich naturgemäß an die Theorie der algebraischen Curven anschließt. Es sind dies insbesondere die geradlinigen Flächen. Ich darf wegen ihrer insbesondere auf die

beiden Abhandlungen von *Segre* verweisen, die Bd. 30 und 34 der Annalen abgedruckt sind (1887, 1889: Recherches générales sur les courbes et surfaces algébriques). —

Als zweites Moment, welches für die Ent- [Di. 24.5.92] wickelung der modernen Curventheorie bestimmend gewesen ist, nannten wir bereits die *Einführung der mehrdimensionalen Anschauungsweisen*. Dieselbe hat sich in expliciter Form nur sehr allmählich vollzogen. *Grassmann* hat ja schon 1844 in seiner „Ausdehnungslehre" den Standpunkt consequent entwickelt, dass die gewöhnliche Geometrie nur ein Specialfall einer allgemeineren Disciplin, eben der mit beliebig vielen Dimensionen arbeitenden Ausdehnungslehre sei. Dann wieder hat *Cayley* in den 60.er Jahren immer wieder von mehrdimensionaler Betrachtung Gebrauch gemacht (cf. die Abhandlung „on Abstract Geometry" in den Philosophical Transactions von 1869) Auch wurde schon in den 60.er Jahren als Gauss' und Riemann's Speculationen über die Hypothesen der Geometrie bekannt geworden waren, die methaphysische Frage des mehrdimensionalen Raumes in Mathematikerkreisen vielfach erörtert. Immer blieb die allgemeine Ansicht die, dass es sich hier um eine mathematische Methode handele,

die man gern bei Gelegenheit und insbesondere zum Zwecke eigener Orientirung benutzen könne, die man aber doch nicht breit in den Vordergrund der mathematischen Erörterung drängen solle. Ich darf hier beispielsweise auf Lie's und meine Arbeiten aus dem Anfange der 70er Jahre verweisen, insbesondere auf Note 4 im Anhange meines Erlanger Antrittsprogram's.

So ist es auch bei Brill und Nöther, um auf deren Arbeit zurückzukommen: die mehrdimensionale Denkweise ist den Verfassern offenbar geläufig *), aber wird bei der Darstellung geflissentlich zurückgedrängt. Das ist erst Ende der 70er Jahre, man möchte sagen durch allgemeinen Consensus, anders geworden.

Damals erschien, um gleich insbesondere von Curven zu sprechen, in den Philosophical Transactions von 1878 die Abhandlung von Clifford: On the Classification of Loci, wo ganz das Programm einer Curventheorie aufgestellt wird, das wir noch gleich besprechen müssen. Ferner in Bd. 16 der Mathematischen Annalen (1879) die schon genannte Arbeit von Kraus (Ueber aussergewöhnliche Specialgruppen), wo zum ersten Male von der „Curve" C_{2p-2} der φ (in R_{p-1}) und von den hindurch-

*) und wird z. B. von Brill. Ann. III, p. 459 (1871) explicite hergestellt.

gehenden Flächen" die Rede ist; Weber hatte seine bezüglichen Resultate in Bd. 13 der Annalen (1877) noch rein analytisch ausgesprochen; das Gleiche tat auch noch *Nöther* in Annalen 17 (1880) in seinen auf den gleichen Gegenstand bezüglichen Untersuchungen. Ich könnte ferner meine eigenen Untersuchungen aus der damaligen Zeit nennen, in denen auch Kurven in mehrdimensionalen Räumen als solche immerzu benutzt werden, so meine Arbeit in Ann. 15 (1879) über Transformation 11ter Ordnung der elliptischen Funktionen und in Ann. 17 (1880) über Normalformen der elliptischen Integrale. Alle diese Ansätze zusammenfassend schrieb dann *Veronese 1881* in Ann. 19 seine große Abhandlung: Behandlung der projektiven Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projizierens und Schneidens". Indem hier die schwierigen funktionentheoretischen Fragen zurückgedrängt sind und dafür das eigentlich geometrische Moment umso lebhafter in den Vordergrund gestellt ist, hat diese Arbeit vor allen anderen auf das geometrische Publikum gewirkt. Hier schließt dann auf italienischer Seite insbesondere *Segre* an. Unter den deutschen Geometern hat *Franz Meyer* die Führung mit einem sogleich noch zu nennenden Buche über Apolarität und rationale

Curven (1883; der wesentliche Inhalt ist mir übrigens schon vom Verf. im Sommer 1880 mitgeteilt worden).

Wir können gleich das _allgemeine Programm_ [Fr. 27.5.92] skizziren, wie es sich unter Aufnahme der mehrdimensionalen Sprechweise, nunmehr für die Curven beliebig ausgedehnter Räume entwickelt. Wir nehmen an, wir haben die allgemeinsten linearen Schaaren aequivalenter Punktgruppen G_Q^q auf einer Riemann'schen Fläche definirt; q ist dabei $= Q - p + \sigma$ nach dem Riemann-Roch'schen Satze, unter σ die Zahl der linear unabhängigen dw oder φ verstanden, die in einer beliebigen G_Q der Schaar verschwinden. Diese G_Q^q bezeichnen wir zugleich bei dem angegebenen Werte von q als _Vollschaar_; heben wir aus ihr eine niedere Mannigfaltigkeit von Punktgruppen durch lineare Bedingungen heraus, so entsteht die _Teilschaar_ $G_Q^{q'}$, wo $q' < q$. Eine jede solche Schaar liefert uns dann eine Darstellung der Riemann'schen Fläche in Gestalt einer _Raumcurve_: das eine Mal als _Vollcurve_ Q^{ter} Ordnung des Raumes von q Dimensionen, das andere Mal als _Teilcurve_ Q^{ter} Ordnung des $R_{q'}$. Der $R_{q-q'-1}$ hat dabei einerseits mit der Vollcurve keinen Punkt gemein, es ist aber nicht auszuschließen, daß er sie in $1, 2, \ldots \rho$ Punkten trifft; die Projection auf $R_{q'}$ wird dann eine Curve der Ordnung $Q - \rho$ sein, welche

selbst möglicherweise eine Vollcurve ist.

Jedenfalls sehen wir hier einen bestimmten Ansatz vor uns:

a) Aufzählung aller Vollcurven.

b.) Inbetrachtnahme aller Curven, die aus den Vollcurven durch irgendwelche Projection entstehen.

Hiermit verbindet sich die weitere Unterscheidung, ob für die zu Grunde liegende C_Q die Constante τ des Riemann-Roch'schen Satzes gleich 0 oder > 0 ist. Ist sie $= 0$, so haben wir eine „allgemeine" Curve, eine _Generalcurve._ Alle Curven mit $p = 0$ oder $p = 1$ sind natürlich Generalcurven, ebenso alle Curven mit $Q > 2p - 2$. Ist $\tau > 0$, so haben wir eine _Specialcurve._ Diese Voraussetzung trifft sicher zu, wenn $Q - p$ allein genommen 0 oder negativ ist, also für $Q < p + 1$. Es giebt eine oberste Specialcurve, das ist die C_{2p-2} des R_{p-1}, die wir wiederholt erhielten, indem wir die homogenen Coordinaten $\varphi_1 : \varphi_2 : \dots \varphi_p$ eines Punktes des R_{p-1} mit den überall endlichen Differentialen $dw_1, dw_2, \dots dw_p$ der Fläche proportional setzten. _Aus ihr deriviren alle anderen Specialcurven durch Projection._ Es ist dies nur eine andere Ausdrucksweise für den schon im Winter erwähnten Satz, daß jede Specialfunction auf der Riemann'schen Fläche der Quotient zweier linearer Verbindungen der dw ist. Die Auf-

zählung aller Specialcurven ist natürlich nichts Anderes als das vorhin erwähnte Problem der Aufzählung aller auf einer Riemann'schen Fläche existirenden Schaaren von Specialgruppen. Es handelt sich dabei, wie wir auch vorhin sagten, darum, einen linearen Raum (den wir hier R_ν nennen wollen) auf alle Weisen so gegen die C_{2p-2} des R_{p-1} zu legen, dass er 1, 2, ... eventuel möglichst viele Punkte mit der C_{2p-2} gemein hat. Von diesem Raume aus projiciren wir dann die Curve auf den $R_{p-\nu-2}$.

Indem wir diese neuen Sätze aufnehmen, modificiren wir unsere Disposition folgendermaßen. Wir werden

ad a) diejenigen Vollcurven (Normalcurven, Normcurven) untersuchen, welche allgemeinen Charakter haben, d. h. $\sigma = 0$ aufweisen. Ferner dann

ad b) insbesondere die Curve C_{2p-2} der φ im R_{p-1}, der wir ein ganz besonderes Interesse zuwenden. Endlich handeln wir

ad c) von den verschiedenen Lagen, welche lineare R_ν gegen die Curven ad a) und insbesondere die C_{2p-2} ad b) haben können, und von der Uebersicht, welche man von hieraus über das Problem erhält, auch die Teilcurven aufzählen, welche in irgendwelchem gegebenen Raume enthalten sein mögen. *).

*) vergl. hierzu die Entwickelungen in Kap. III, 2 der Vorlesungen über elliptische

[Ms. 30.5.92.]

a. Von den Normalcurven mit $\sigma = 0$.

Wir handeln insbesondere von den Curven mit $p = 0$ und $p = 1$.

1) $p = 0$. Eine Riemann'sche Fläche mit $p = 0$ hat bekanntlich keinen „Modul". Andererseits existirt auf einer solchen Fläche für jeden Zahlenwert von α nur eine einzige g^{α}_{α}. Daher erhalten wir also im R_{α} bei Zugrundelegung der projectiven Auffassung nur eine einzige Normalcurve des Geschlechtes 0: die C_{α} des R_{α}. Diese Normalcurve ist immer ebenso als einfachste Curve ihres Raumes zu betrachten, wie der Kegelschnitt in der Ebene oder die Raumcurve 3ter Ordnung. So wird denn diese Curve bei zahlreichen Gelegenheiten als ein Hülfsmittel benutzt. Wir haben z.B. vorigen Winter in der Vorlesung über Algebra gesehen, wie sie mitsammt ihrer developpablen Fläche dienlich ist, die Multiplicitäts- und Realitätsverhältnisse der Wurzeln einer Gleichung αten Grades $f_{\alpha}(\lambda) = 0$ zu erläutern. Nicht minder nützlich ist sie in der Invariantentheorie der binären Formen αter Ordnung $f_{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2)$, worüber man insbesondere das Buch von Franz Meyer „Ueber Apolarität und rationale Curven" (1883) vergleichen möge.

Modulfunctionen. Vergl. ferner die Arbeiten von Segre und den anderen neueren Italienern, bei denen die gleiche Art des Ansatzes durchweg zu Grunde liegt.

Man legt dabei die Curve am einfachsten immer in folgender Parameterdarstellung zu Grunde:

$$x_1 : x_2 \ldots\ldots x_{\alpha+1} = \lambda^{\alpha} : \lambda^{\alpha-1} : \ldots\ldots \lambda^{1} : 1.$$

Von eben dieser Parameterstellung aus wird man dann auch leicht alle die Fragen beantworten, die man im Sinne unserer allgemeinen Auffassung an die Theorie unserer Curven stellen wird. Ohne selbst die Sache völlig durchgedacht zu haben, will ich hier in dieser Hinsicht folgende Behauptungen aufstellen:

1.) Für unsere Curve coincidiren die algebraischen ganzen Formen Γ und die ganzen rationalen Formen γ ohne Weiteres; die Curve ist also eine „Elementare", die $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{\alpha+1}$ bilden auf ihr ein „volles Formsystem". – Indem $p = 0$, ist von den Nullpunkten einer Γ, und also einer γ, keiner durch die übrigen mitbestimmt.

2). Von hier aus erfährt man sofort die Zahl der Flächen μ^{ter} Ordnung, welche durch die Curve gehen; insbesondere findet man als Zahl der linear unabhängigen durch die Curve gehenden Flächen 2ten Grades $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$.

3). Diese $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ Flächen zweiten Grades lassen sich am einfachsten aufstellen, indem man sämmtliche Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_{\alpha} \\ x_2 & x_3 & \ldots\ldots & x_{\alpha+1} \end{vmatrix}$$

gleich Null setzt.

4). Besagte Flächen zweiten Grades reichen aus, um die Curve rein darzustellen: sie fixiren den „Rationalitätsbereich" der Curve. Aber mehr als dieses, sie geben auch den „Integritätsbereich", indem jede durch die Curve hindurchgehende Fläche F_μ die Darstellung gestattet:

$$F_\mu = M' F_2' + M'' F_2'' + \cdots\cdots\cdots,$$

unter $M', M'', \ldots\ldots$ Polynome $(\mu-2)^{\text{ten}}$ Grades verstanden.

5.) Endlich sollte es nicht schwer sein, und zwar durch Anwendung des gewöhnlichen (Chasles'schen) Correspondenzprincips, eine allgemeine Theorie der linearen Räume R_ν zu entwerfen, welche unserer Curve in irgendwelcher Zahl ρ von Schnittpunkten begegnen. Das gäbe dann die Grundlage für das Studium aller Teilcurven, welche aus unserer Normcurve durch Projection abgeleitet werden können.

Ob die hiermit bezeichneten Fragen nicht alle in der Literatur erledigt vorliegen? Sicher wird das implicite in vielfacher Hinsicht der Fall sein. Aber die Untersuchungen von Veronese, von Segre, sowie auch von Emil Weyr, die man da zunächst heranziehen wird, sind für den Vergleich nicht günstig. Besagte Autoren folgen nämlich bei der Redaction ihrer Arbeiten

der bei den Geometern vielfach geltenden Regel, nicht bestimmte Fragestellungen von vornherein in's Auge zu fassen und zur Erledigung zu bringen, sondern mehr dem freien Impulse der Phantasie folgend bald nach dieser bald nach jener Seite einzelne, besonders elegant scheinende Sätze zu entwickeln.

Da ist denn, wenn man nicht viele Zeit auf das Studium der betreffenden Abhandlungen verwenden will, schwer zu sehen, wieviel eigentlich erreicht ist. Einen anderen Character haben die auf rationale Curven des R_2 und R_3 bezüglichen neueren Arbeiten von Brill, Franz Meyer, Rohn, W. Stahl (ich verweise etwa auf den Aufsatz des Letzteren im eben erschienenen Annalenhefte 40, I). Dieselben betreffen eine Frage, welche nach einer etwas anderen Richtung liegt, als wir zeitlang in Betracht zogen, nämlich die Frage der projectiven Erzeugung der rationalen Curven: Man wird eine ebene rationale Curve erhalten, wenn man von zwei niederen rationalen Curven beginnt, diese projectiv aufeinander bezieht und die Tangenten projectiv zusammengeordneter Punkte der beiden Curven zum Schnitt bringt. Auf wieviele Weisen läßt sich eine vorgelegte ebene rationale Curve solcherweise erzeugen? Bei Raumcurven wird man zum entsprechenden Zwecke die Osculationsebenen

dreier projektiv aufeinander bezogener, niederer, rationaler Curven zum Schnitt zu bringen haben. –

2) $p = 1$. Hier handelt es sich um C_α des $R_{\alpha-1}$, für welche die doppelt überdeckte Gerade (mit 4 Verzweigungspunkten) die ebene Curve 3. Ordnung, die Raumcurve 4. Ordn. 1ter Species die einfachsten Beispiele sind. Wegen der allgemeinen Theorie darf ich auf meine eigene Darstellung in t. 13 der Sächsischen Abhandlungen (1885); bez. auf die Entwickelungen in dem baldigst erscheinenden Bd. II der elliptischen Modulfunctionen verweisen (Abschn. V. Kap. 1 und 2); man vergl. auch <u>Castelnuovo</u> (Geometria sulle curve ellittiche) sowie <u>Segre</u> (Corrispondenze univoche sulle curve ellitiche), beide in t. 24 der Atti di Torino (1888–89). Natürlich handelt es sich bei dieser Theorie nicht eigentlich um neue analytische Ansätze, sondern mehr um geometrische Deutung der von den elliptischen Functionen her ohnehin bekannten Entwickelungen. Indem wir mit w das überall endliche elliptische Integral bezeichnen und unter σ die Sigmafunction verstehen, werden wir die Curve C_α in der Weise darstellen, daß wir schreiben:

$$\rho x_i = \sigma(w - a_{i1}) \cdot \sigma(w - a_{i2}) \cdots\cdots \sigma(w - a_{i\alpha})$$
$$[i = 1, 2, \ldots\ldots \alpha],$$

wobei $\Sigma a_{1k} = \Sigma a_{2k} = \ldots\ldots \Sigma a_{\alpha k}$ zu nehmen sein wird.

(damit der Quotient zweier beliebiger x eine doppeltperiodische Function von w sei):

Hier bezeichnet der gemeinsame Wert der Summen $\Sigma a_{1K}, \Sigma a_{2K}, \ldots$ die einzelne $G_{\alpha}^{\alpha-1}$, von der wir bei der Darstellung der Curve ausgehen. Aber es ist doch nicht so, als ob diese Curve wechselte, wenn man den genannten Summenwert und damit die $G_{\alpha}^{\alpha-1}$ abändert. Vielmehr kann man diese Abänderung immer dadurch compensiren, daß man w um eine entsprechende Größe vermehrt (oder vermindert): die Curve bleibt dabei ungeändert erhalten und erleidet nur, der Änderung der w entsprechend, eine eindeutige Transformation in sich selbst. Jede einzelne Riemann'sche Fläche $p = 1$ liefert hiernach für jeden $R_{\alpha-1}$, projective Auffassung vorausgesetzt, nur eine einzige C_{α}. Die C_{α} hat daher auch nur eine einzige absolute Invariante, dem einen „Modul" entsprechend, welche die Fläche $p = 1$ der Riemann'schen Theorie zufolge besitzt.

Im einfachsten Falle, der C_2 des R_1, d. h. der doppelt überdeckten Geraden mit 4 Verzweigungspunkten, kann man das Vorhandensein eines solchen Moduls ohne Weiteres erkennen: der Modul wird uns durch das Doppelverhältniß der 4 Verzweigungen, oder irgendeine Function dieses Doppelverhältnisses

vorgestellt. Aber man kann die C_3 des R_2^c leicht auf eine solche C_2 des R_1^c zurückführen, indem man sie von einem ihrer Punkte aus auf einen R_1^c projicirt. Ebenso die C_4 des R_3^c durch Projection von einer ihrer Secanten aus, etc. Alle die so bei gegebener Curve entstehenden C_2 des R_1^c müssen unserem allgemeinen Ansatze zufolge, weil sie derselben Riemann'schen Fläche entsprechen, projectiv sein. Es folgt so erstlich der Salmon'sche Satz: Das Doppelverhältniß der 4 Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte einer Curve 3ter Ordnung an die Curve gelegt werden können, hat von der Wahl des Punktes unabhängigen Wert, mit Verallgemeinerung auf Raumcurven 4ter Ordnung etc.; ferner aber erkennen wir in diesem Doppelverhältnisse den einen für die Curve charakteristischen Modul.

Ich sage ferner, daß auch bei den elliptischen C_α die γ mit den Γ übereinstimmen. Insbesondere findet man $\frac{\alpha(\alpha-3)}{2}$ Flächen zweiter Ordnung, welche durch die Curven gehen. Dieselben genügen, für $\alpha > 3$, um die Curve rein darzustellen. Ob sie auch genügen, um den Integritätsbereich der Curve festzulegen?

Die Theorie der linearen Räume, welche der Curve mehrfach begegnen, erhält ihr besonderes Interesse dadurch, daß sich aus denselben merkwürdige Configurationen

zusammensetzen lassen. Vergl. die „singulären" Koordinatenpolyeder meiner eben genannten Abhandlung, sowie eine Arbeit von Schönflies in Ann. 35 (1889). Es handelt sich da wesentlich um Sätze, die in die Theorie der Teilung und der Transformation der elliptischen Functionen gehören. Ausführlich werden wir auf dieselben erst in dem späteren Kapitel eingehen können, in welchem wir allgemein von der Teilung der Abel'schen Functionen handeln werden.

b. Von der Normalcurve der φ bei $p > 1$.

Indem wir uns zu höheren Werten von p wenden, wollen wir ausschliesslich die wichtigste dann vorhandene Normalcurve in Betracht ziehen, jene C_{2p-2} des R_{p-1}, welche definirt wird, indem wir die p homogenen Coordinaten des letzteren, die wir $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ nennen, mit den p überall endlichen Differentialen $dw_1, dw_2 \ldots dw_p$ der Fläche proportional setzen. Hierbei kommen wesentlich die beiden schon öfter genannten Abhandlungen: von Weber in Ann. 13 (1877: Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle) und von Nöther in Ann. 17 (1880: Invariante Darstellung der algebraischen Functionen) in Betracht. Wir constatiren erstlich, dass unsere Curve dem R_{p-1} „eigentlich" angehört,

d. h. dass sie nicht in einem linearen Raume von noch niederer Dimensionenzahl enthalten sein kann. Denn das würde bedeuten, dass zwischen den $dw_1, \ldots dw_p$ eine lineare Relation bestände, was bekanntermassen unmöglich ist. Nun kann eine Curve, welche dem R_{p-1} eigentlich angehört, wie man leicht sieht, keine kleinere Ordnung haben als $p-1$, und ist die Ordnung $= p-1$, so hat man notwendig mit der bez. Normalcurve des Falles $p = 0$ zu tun. Daher kann bei unserer C_{2p-2} nur einer von 2 Fällen eintreten: entweder sie ist eine einfach überdeckte Curve, oder sie reduziert sich im besonderen Falle auf eine doppelt überdeckte rationale Normalcurve C_{p-1}. Da man die Punkte der letzteren durch einen Parameter λ rational darstellen kann, so handelt es sich bei der doppelt überdeckten Curve notwendig um eine hyperelliptische Irrationalität. Und in der Tat kommt man auch rückwärts, wenn man bei einem hyperelliptischen Gebilde $s = \sqrt{f_{2p+2}(\lambda)}$ die zugehörige Normalcurve der φ aufsucht, zu einer (doppelt überdeckten) rationalen C_{p-1}. Denn man hat in diesem Falle etwa:

$$w_1 = \int \frac{\lambda^{p-1} d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad w_2 = \int \frac{\lambda^{p-2} d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad w_p = \int \frac{\lambda^{0} \cdot d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

daher

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots\ldots \varphi_p = dw_1 : \ldots\ldots\ldots dw_p = \lambda^{p-1} : \lambda^{p-2} : \ldots : 1$$

Das sind ohne Weiteres die Formeln für eine rationale C_{p-1}, und daß diese doppelt überdeckt ist, entspricht dem Umstande, daß jedem Werte von λ zwei Punkte des hyperelliptischen Gebildes zugehören. Den $2p+2$ Wurzeln von $f(\lambda)=0$ entsprechen dabei ebensoviele auf der doppelt überdeckten C_{p-1} gelegene „Scheitel" (oder „Verzweigungspunkte").

Man hat den solcherweise geschilderten hyperelliptischen Fall früher gewöhnlich als einen eigentlichen Ausnahmefall bei allgemeinen Untersuchungen über die Curve der φ bei Seite gelassen. Wir werden in der Folge vielfach genau umgekehrt verfahren: wir werden uns vor Augen halten, daß dieser „Ausnahmefall" sich doch continuirlich in die Reihe der übrigen Fälle einordnen muß, und daß wir also den allgemeinen Fall in der Weise in Untersuchung ziehen können, daß wir die Verhältnisse zunächst einmal im hyperelliptischen Falle untersuchen und von da dann durch Continuität weiter gehen. Die besondere Wichtigkeit der Normalcurve der φ ruht nun darin, daß jeder einzelnen Riemann'schen Fläche, wie allen denen, die aus ihr durch eindeutige Transformation entstehen mögen, im projectiven Sinne nur eine Normalcurve der φ zugehört. Eben deshalb finden die Verhältnisse auf der Riemann'schen Fläche an der Curve der φ, wie es Nöther in der Ueberschrift

seines Aufsatzes ausdrückt, eine „invariante Darstellung".

Wir verfolgen dies hier zunächst an der Frage der $3p-3$ „Moduln" der Riemann'schen Fläche, die sich hier als *$3p-3$ absolute Invarianten der Curve* der φ werden darstellen müssen, es ist dies für die Folge geradezu die einfachste Definition der besagten Moduln: *wir bezeichnen als Moduln eines algebraischen Gebildes die $(3p-3)$ absoluten Invarianten der zugehörigen Curven der φ* (wobei wir uns noch alle Freiheit lassen werden, diese Invarianten, jenachdem es paßt, rational oder irrational oder auch transcendent zu wählen). Zunächst aber wird es sich darum handeln, bei unserer Curve überhaupt einmal das Vorhandensein von $(3p-3)$ absoluten Invarianten nachzuweisen. Wir leisten dies, indem wir einen Ansatz von *Weierstraß*, der aus dessen Vorlesungen und gelegentlichen, indirecten Mitteilungen bekannt ist, *) unter Zuhülfenahme geometrischer und Riemann'scher Methoden entwickeln. Weierstraß geht davon aus, daß es auf einer Curve der R_{p-1} eine endliche Zahl von Stellen geben wird, in denen ein R_{p-2} p fach schneiden kann: entsprechend den „Wendepunkten" der ebenen Curven oder den „*Hyperosculationspunkten*" einer gewöhnli-

---

*) vergl. z. B. *Brill–Noether* in Annalen 7, p. 302–304, *Schottky* in Crelle 83 (1877) p. 317–319, etc.

chen Raumcurve.*) Wir wollen die Zahl dieser „Weierstraß"-Punkte, welche unsere C_{2p-2} im Allgemeinen darbietet, hier um so lieber vorab abzählen, als wir dabei eine gute Gelegenheit haben, das Cayley-Brill'sche Correspondenzprincip anzuwenden. Ich denke mir zu dem Zwecke aus der C_{2p-2} der R_{p-1} durch Projection von irgend einem Curvenpunkte aus auf den nächst niederen Raum eine

C_{2p-3} der R_{p-2}

gemacht, aus dieser durch die entsprechende Operation eine C_{2p-4} der R_{p-3} u.s.w. fort, bis wir zu einer

C_{p+2} der R_3

und endlich zu einer

C_{p+1} der R_2 kommen.

Letztere hat dann als Curve vom Geschlechte p notwendig $\frac{p \cdot p-3}{2}$ Doppelpunkte und also, nach der zweiten Plücker'schen Formel, $9p-3$ Wendepunkte. Von hier aus beginnend, bestimme ich nun zunächst, vermöge

---

*) Unendlich groß kann die Zahl dieser Punkte nicht werden, wenn man nicht will, daß die Curve schon einem Raume von geringerer Dimensionenzahl angehört; vergl. Nöther in Crelle 92.

des Correspondenzprincips, die Zahl der Hyperosculationspunkte der C_{p+2} des R_3, dann die Zahl der Stellen der C_{p+3} des R_4, in denen ein R_3 fünffach schneidet, etc.

Folgendermaßen: In einem Punkte x der C_{p+2} des R_3 construiren wir die Osculationsebene, welche 3 fach in x und also einfach noch in $p-1$ Punkten y schneidet, die wir dem Punkte x entsprechend setzen. Wieviele x gehören umgekehrt zu einem gegebenen y?

Wir haben uns nur zu überlegen, daß ein jedes solche x für die ebene Curve C_{p+1}, als welche sich unsere C_{p+2} vom Punkte y aus projicirt, einen Wendepunkt vorstellt. Es giebt also bei gegebenen y die vorhin bestimmte Zahl $9p-3$ von Punkten x. Fassen wir zusammen, so haben wir jetzt eine Correspondenz $\binom{\alpha \;\; \beta}{x , y}$ mit $\alpha = 9p-3$, $\beta = p+1$ und der Wertigkeit 3. Das giebt $\alpha + \beta + 2\gamma p = 16p-4$ Coincidenzen. Aber diese Coincidenzen sind nichts Anderes als die gesuchten Hyperosculationspunkte unserer C_{p+2}. Deren Zahl ist also eben $16p-4$.

Von hier gehen wir nun durch ein ganz entsprechendes Verfahren zu den merkwürdigen Stellen der C_{p+3} des R_4, deren Zahl sich zu $25p-5$ ergiebt, ... endlich zu den Weierstraß-Punkten der C_{2p-2} der R_{p-1}. Als Zahl der letzteren folgt dann p^3-p, u. s. w. –

Wir nehmen jetzt einen dieser Weierstraß-Punkte und construiren in ihm den p fach schneidenden R_{p-2}, dessen Gleichung $v_\varphi = 0$ sei. Derselbe schneidet unsere Curve in weiteren $p-2$ Punkten, durch die wir einen weiteren linearen Raum R_{p-2} hindurchlegen, der durch $u_\varphi = 0$ gegeben sein soll. <u>Die Function</u>

$$\lambda = u_\varphi : v_\varphi$$

<u>nimmt dann auf unserer Curve jeden Wert in p Punkten an, den Wert ∞ insbesondere in dem einen ausgezeichneten (Weierstraß-) Punkte, von dem wir ausgingen.</u> Daher werden wir als Bild unserer C_{2p-2} über der λ Ebene eine p blättrige Riemann'sche Fläche haben, deren sämmtliche Blätter bei $\lambda = \infty$ im Cyclus zusammenhängen. Es ist das ein $(p-1)$ facher Verzweigungspunkt. Infolgedessen hat unsere Fläche, die doch das Geschlecht p aufweisen muß, noch $3p-1$ weitere Verzweigungspunkte. Mögen wir einen derselben nach $\lambda = 0$, einen anderen nach $\lambda = 1$ legen, was immer gelingen wird, da wir statt unseres λ gern irgend ein $a\lambda + b$ der Betrachtung zu Grunde legen können.

<u>Die Argumente der $3p-3$ noch übrigen Verzweigungspunkte geben uns dann $3p-3$ für unser Gebilde charakteristische Constante, d.h. eine besondere Bestim-</u>

<u>nungsweise der $3p-3$ von uns gesuchten Riemann'schen Moduln.</u> Anders ausgesprochen: Unter den R_{p-2} des „Büschels" $u_q - \lambda v_q$ giebt es außer $v_q = 0$ noch $3p-1$, welche unsere C_{2p-2} „berühren". Die $3p$ hiernach im Büschel vorhandenen „Berührungs-R_{p-2}" bilden miteinander $3p-3$ unabhängige Doppelverhältnisse und <u>diese $3p-3$ Doppelverhältnisse dürfen wir als Riemann'sche Moduln des Gebildes ansehen.</u> In dieser Form entwickelt läßt unsere Betrachtung noch der Einwände eine [Di. 31.5.92.] ganze Menge zu. Wir werden diese Einwände jetzt beseitigen, und zugleich sehen, wie sich die Verhältnisse in allen möglichen Fällen gestalten, wenn wir die p blättrige Riemann'sche Fläche genauer betrachten und zugleich immer die Riemann'schen Existenzsätze vor Augen halten. (In ganz entsprechender Weise wird man überhaupt oft die Entwickelungen der Geometer ergänzen können; wir werden dafür bald ein weiteres Beispiel kennen lernen). Construiren wir uns zunächst eine Riemann'sche Fläche der gerade beschriebenen Beschaffenheit.

Wir werden p Blätter übereinanderlegen und nun vom Punkte ∞ aus einen Verzweigungsschnitt auslaufen lassen, der die Blätter 1 und 2 verbindet, dann einen anderen, der 2 und 3 verbindet, ... endlich einen, der $p-1$ und p verknüpft: die Endpunkte dieser Verzweigungsschnitte können

ganz beliebig genommen werden. Wir haben dann um den Punkt herum den gewollten cyclischen Zusammenhang sämmtlicher Blätter. Es bleiben uns dann noch weitere $2p$ Verzweigungspunkte einzufügen, also wenn wir uns dieselben zu je 2 durch einen Verzweigungsschnitt verbunden denken wollen, p Verzweigungsschnitte. Die können wir ganz beliebig in die p Blätter einordnen, beispielsweise so, dass das p^{te} Blatt an ihnen nicht beteiligt ist. Das Gesagte genügt, um zu sehen, dass die bezeichneten p blättrigen Flächen wirklich existiren, dass sie von $3p-3$ wesentlichen Parametern abhängen, und insofern zu ihnen vermöge des Riemann'schen Existenzsatzes doch wirkliche algebraische Functionen und also auch Normalcurven der φ gehören: dass man von der allgemeinen Curve der φ aus vermöge der Weierstrass'schen Construction wirklich zu p blättrigen Flächen der beschriebenen Eigenschaft hingelangt. Aber zugleich folgt, dass man in speciellen Fällen von der Normalcurve der φ aus alle die besonderen Flächen wird erhalten können, die aus unserer p blättrigen Fläche durch Zusammenrücken der Verzweigungspunkte hervorgehen. Wenn 2 Verzweigungspunkte zusammenrücken, so können sie sich entweder addiren ($\overline{12}$ und $\overline{23}$ geben einen doppelten

Verzweigungspunkt) oder subtrahiren (Π und noch ein Π heben sich gegenseitig auf) Im letzteren Falle wird man nun zwei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden müssen: Entweder die Riemann'sche Fläche bleibt auch nach Zusammenrücken der beiden Verzweigungspunkte ein zusammenhängendes Ganzes. Dann hat sich weiter nichts geändert, als daß ihr Geschlecht um 1 gesunken ist, und man hat dann eben einen Gränzfall vom Geschlechte $p-1$ vor Augen. Oder aber die Riemann'sche Fläche <u>zerfällt</u> in 2 Flächen. Hat die eine derselben das Geschlecht p_1, die andere das Geschlecht p_2, so ist $p_1 + p_2 = p$. Diese letztere Möglichkeit wird nun insbesondere bei uns hervortreten, wenn wir das p^{te} Blatt unserer Fläche garnicht bei den $2p$ Verzweigungspunkten, die wir hinterher einführten, beteiligen und nun den von ∞ auslaufenden Verzweigungsschnitt, durch den allein jetzt das p^{te} Blatt an die übrigen angeheftet ist, auf den Punkt ∞ zusammenziehen. In der Tat trennt sich dann das p^{te} Blatt von der übrigen Fläche ab, u. da ein einzelnes Blatt für sich genommen das Geschlecht 0 hat, so werden wir daneben noch eine $(p-1)$ blättrige Fläche behalten, die das Geschlecht p besitzt. Die $(p-1)$ Blätter dieser Fläche hängen dann bei ∞ wieder im

Cyclus zusammen und sind übrigens durch $3p-2$ einfache Verzweigungspunkte verbunden; die Fläche hängt also von $3p-4$ wesentlichen Constanten ab. Auch diese Fläche wird bei der Weierstrass-Construction resultiren können, und zwar muss das bei ∞^{3p-4} der ∞^{3p-3} zu unterscheidenden Normalcurven der φ der Fall sein. Welche Modification die C_{2p-2} in diesem Falle, als Curve betrachtet, der allgemeinen C_{2p-2} gegenüber aufweisen muss, bleibe zu untersuchen. Wir werden nun weitergehend auch das $(p-1)^{te}$ Blatt abschnüren können, dann das $(p-2)^{te}$ Blatt u.s.w. fort, bis zuletzt nur noch 2 Blätter übrig bleiben. Wir haben also da eine ganze Reihe von Flächen vom Geschlechte p, der Reihe nach mit $3p-1, 3p-2, \dots 2p+1$ im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkten und also $3p-3, 3p-4, \dots 2p-1$ wesentlichen Constanten. Die zweiblättrige Fläche bezeichnet natürlich den hyperelliptischen Fall. Aber alle diese Flächen sind nebeneinander in Betracht zu ziehen, wenn man eine erschöpfende Theorie der Weierstrass'schen Normalform haben will.

Weierstrass hat in der Tat einen bemerkenswerten Ansatz gegeben, um für jeden einzelnen dieser Fälle eine zugehörige analytische Darstellung zu

finden. Da unsere Flächen bei ∞ nur einen einzelnen Punkt aufweisen, so werden die zur Fläche gehörigen „ganzen Functionen" solche Functionen sein, die nur an einer bestimmten Stelle des algebraischen Gebildes ∞ werden. Infolgedessen ist es nicht schwer, die verschiedenen „ganzen Functionen", die auf unserer Fläche existiren, bez. die Möglichkeiten, die betreffs dieser ganzen Functionen vorliegen, einzeln aufzuzählen (Weierstraß' Lückensatz; vergl. Nöther in Crelle Bd. 97, 1884 oder auch meine erste Vorlesung über Abel'sche Functionen (vom Sommer 1888)). Daraufhin kann man die Relationen, welche zwischen diesen ganzen Functionen bestehen mögen, mit unbestimmten Constanten ansetzen; vergl. wegen $p=3$ die Erläuterungen bei Schottky in Crelle 83, 1877 (p 317–319), wegen $p=4$ die Dissertation von Valentin 1879. Hat man alle Gleichungen gegen einander abgeglichen, so sieht man, daß in denselben $3p-3$, $3p-4$, ... wesentliche Constante auftreten.

Wir können das hier leider nicht mehr weiter verfolgen, sondern wenden uns zur directen Betrachtung der C_{2p-2} zurück, indem wir mit Weber und Nöther fragen, wieviele Flächen 2ten, 3ten,

... Grades durch die Curve gehen mögen? Wir erhalten in dieser Hinsicht zunächst mit Weber eine untere Gränze, indem wir etwa folgende Ueberlegung, an dem Beispiele der Flächen 2ter Ordnung anstellen. Ganze rationale Verbindungen der $\varphi_1 \dots \varphi_p$ sind zunächst in der Zahl $\frac{p\cdot(p+1)}{2}$ vorhanden. Mögen nun K_2 derselben längs unserer C_{2p-2} verschwinden, so haben wir von den übrigen hier auf unserer Curve $\left(\frac{p\cdot(p+1)}{2} - K_2\right)$ Formen φ_2. Aber die φ_2 sind zugleich „algebraische" ganze Formen auf der Curve, d.h. „Formen Γ_2". Und die Zahl der verschiedenen Γ_2 ergiebt sich sofort nach dem Riemann-Roch'schen Satze. Denn da eine Γ_2 in $4p-4$ Curvenpunkten verschwindet, und diese Zahl $> 2p-2$ ist, so gilt hier der Riemann-Roch'sche Satz ohne Zusatzglied. Hiernach ist die Zahl der $\Gamma_2 = 4p-4-p+1 = 3p-3$. Somit folgt $\frac{p(p+1)}{2} - K_2 \leq 3p-3$, d.h. die Zahl K_2 der durch unsere Curve C_{2p-2} gehenden Flächen 2ten Grades: $K_2 \geq \frac{(p-2)(p-3)}{2}$. Analog kommt für die Zahl K_3 der durch die Curve gehenden Flächen 3ten Grades: $K_3 \geq \frac{(p-3)(p^2+6p-10)}{6}$, etc. etc.

Diese Formeln genügen bereits, wie Weber bemerkt, um über die Normalcurve der φ in den beiden niedersten Fällen $p = 4, 5$ Auskunft zu geben [bei $p = 2, 3$ ist überhaupt kein Problem zu lösen, weil die analytische Darstellung einerseits der doppelt überdeckten Geraden mit 6 Verzweigungspunkten, andererseits der Curve 4ter Ordnung in der Ebene von vornherein auf der Hand liegt]. Wir haben erstlich bei $p = 4$:

eine C_6 der R_3, durch welche sicher eine Fläche 2ten Grades

und fünf Flächen 3ten Grades gehen. Da unmöglich mehr als eine Fläche 2ten Grades durch die Curve gehen kann, sie wäre ja sonst nicht von der 6ten Ordnung, so ist unsere Curve notwendig Schnittcurve einer Fläche 2ten und einer Fläche 3ten Grades. Und da umgekehrt die Schnittcurve von F_2 und F_3 im allgemeinen Falle dem Geschlechte 4 angehört, wie wir früher lernten, und die Ebenen des Raumes richtig die zugehörigen φ vorstellen, so ist unsere C_6 des R_3 eben die allgemeine Schnittcurve von F_2 und F_3.

Analog erkennen wir, daß die C_8 des R_4, die wir bei $p=5$ zu betrachten haben, und durch die mindestens drei Flächen 2ter Ordnung hindurchgehen können, geradezu der allgemeine Schnitt dreier Flächen zweiten Grades des R_4 ist. — Für größere p haben diese schönen Theoreme leider kein Analogon, indem z. B. bei $p=6$ K_2 bereits ≥ 6 wird, sechs Flächen 2ten Grades aber im R_5 im Allgemeinen sicher keine Curve gemein haben, also die Flächen 2ten Grades, welche durch die Curve gehen, nicht unabhängig von einander angenommen werden können.

Soweit die Weber'sche Arbeit (was die hier vorliegende Frage angeht). Und nun hat Nöther l. c. die gefundenen Resultate wesentlich verschärft. Wir hatten für die Zahlen K_2, K_3, . . . der hindurchgehenden Flächen 2ten, 3ten Grades nur erst Ungleichungen gefunden [Di. 2.6.92]

und blos bei den Beispielen gesehen, dass bei ihnen das Gleichheitszeichen herrscht: Nöther beweist, dass allgemein das Gleichheitszeichen zu nehmen ist, dass also bei unserer C_{2p-2}, wie wir es im vorigen Wintersemester schon angaben, überhaupt die γ und Γ übereinstimmen (dass die φ für unsere Curve ein volles Formensystem bilden). Nur der hyperelliptische Fall bildet hierbei eine Ausnahme.

Wir werden uns hier darauf beschränken, den bezüglichen Nachweis für die Formen 2ten Grades zu bringen. Wir wollen nämlich eine γ_2 construiren, welche genau so viele willkürliche Constante enthält, wie die allgemeine Γ_2, nämlich $3p-3$, und gewiss nicht längs der Curve C_{2p-2} identisch verschwindet, es sei denn, dass man alle ihre Coëfficienten $=0$ nimmt. Zu dem Zwecke suchen wir uns auf C_{2p-2} $(p-2)$ Punkte $\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_{p-2}$ in allgemeiner Lage. Durch selbige werden dann nur zwei Ebenen gehen, die wir $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ nennen wollen. Ferner wird von den Schnittpunkten, die $\varphi_1-\lambda\varphi_2=0$ mit der C_{2p-2} gemein hat, keiner ausser den α festliegen können; wir haben also p bewegliche Schnittpunkte $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_p$.

Durch das einzelne System dieser β geht dann nach dem Brill-Nöther'schen Reciprocitätssatze gerade eine Ebene $(\tau=1)$. Endlich sei $\varphi_3=0$ eine Ebene, welche nicht durch die Punkte $\alpha_1 \cdots \alpha_{p-2}$ hindurchgeht. Wir bilden dann

folgenden Ausdruck mit $3p-3$ Konstanten:

$$\gamma_2 = \varphi_1 \cdot \sum_1^p a_K \varphi_K + \varphi_2 \cdot \sum_2^p b_K \varphi_K + \varphi_3 \cdot \sum_3^p c_K \varphi_K$$

und behaupten, daß er nicht anders längs der Curve verschwinden kann, als wenn alle a_K, b_K, c_K einzeln gleich 0 sind. In der Tat: soll er zunächst in den Punkten $\alpha = 0$ sein, so folgt, daß für diese $\sum_3^p c_K \varphi_K$ verschwinden muß. Aber es gehen, wie wir wissen, durch die Punkte α keine anderen Ebenen, als $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ [bez. deren lineare Kombinationen]. Daher muß $\sum_3^p c_K \varphi_K$ identisch Null sein, die c_K müssen verschwinden. Wir beschränken uns also jetzt auf den Ansatz $\gamma_2 = \varphi_1 \cdot \sum_1^p a_K \varphi_K + \varphi_2 \cdot \sum_2^p b_K \varphi_K$ und verlangen, daß dieser längs der Curve verschwinde. Da richten wir dann unsere Aufmerksamkeit auf die Punkte β, für welche $\varphi_1 - \lambda \varphi_2 = 0$ war. Soll γ_2 längs der Curve verschwinden, so wird für dieselben Punkte β $\lambda \sum_1^p a_K \varphi_K + \sum_2^p b_K \varphi_K = 0$ sein müssen. Aber wir bemerkten schon, daß durch die Punkte β keine andere Ebene hindurchgeht, als eben $\varphi_1 - \lambda \varphi_2 = 0$. Daher dann eben $\lambda \cdot \sum_1^p a_K \varphi_K + \sum_2^p b_K \varphi_K$ identisch Null sein muß (welchen Wert auch λ besitzen mag). Das heißt aber, daß alle a_K, b_K einzeln verschwinden w. z. b. w.

Analog verfährt Nöther für die Formen 3ten Grades, etc. etc. Leider aber ist mit dem so erhaltenen schönen Satze noch nicht soviel gewonnen, als man wohl möchte. Wenn wir wissen, daß immer genau $\frac{p-2 \cdot p-3}{2}$

Flächen 2ten Grades durch die Curve gehen, so möchte man glauben, daß dieselben, sobald sie in ausreichender Zahl vorhanden sind, d. h. für $p \geqq 5$, die Curve immer in gleicher Weise bestimmen. Nun ist die Sache so, daß diese $\frac{p-2 \cdot p-3}{2}$ Flächen 2ten Grades allerdings in vielen Fällen genügen, um die C_{2p-2} völlig festzulegen [vergl. Nöther in Ann. 26, 1885: Ueber Normalcurven bei $p = 5, 6, 7$.] daß sie aber gelegentlich auch ein mehrfach ausgedehntes Gebiet gemein haben! Vergl. Kraus in Ann. 16, 1879: Über außergewöhnliche Specialgruppen. –

Wir wenden uns nunmehr zur genaueren Betrachtung eben des Problems der Specialgruppen. Wir erhalten, wie wir wissen, auf unserer C_{2p-2} alle möglichen Schaaren von Specialgruppen, wenn wir lineare Räume R_ν beliebiger Dimension so gegen die Curve orientiren, daß sie mit ihr 1, 2, 3 . . . Punkte gemein haben, und nun die Curve mit denjenigen „Ebenen" $\sum_1^p c_\kappa \varphi_\kappa = 0$ schneiden, welche durch den einzelnen R_ν hindurchgehen.

Wir werden, um da klar zu sehen, am besten die beiden Beispiele $p = 3$ und $p = 4$ vorweg nehmen:

a) $p = 3$. Ebene Curve der 4ten Ordnung.

Von Räumen R_ν kommen hier nur die R_0, d. h. die Punkte der Ebene, und also die durch diese hin=

durchgehenden Strahlbüschel in Betracht. Der Punkt liegt entweder nicht auf der Curve, oder er liegt auf derselben.

Da haben wir nun auf der Curve

erstlich die $G_4^{(2)}$, welche von allen Geraden der Ebene ausgeschnitten wird.

zweitens $\infty^2 G_4^{(1)}$, ausgeschnitten von den Strahlbüscheln, welche von einem Punkte auslaufen, der nicht der C_4 angehört,

endlich $\infty^1 G_3^{(1)}$, ausgeschnitten von den Strahlbüscheln, deren Mittelpunkt auf der Curve liegt.

Das sind die sämmtlichen auf C_4 existirenden Schaaren von Specialgruppen. <u>b) p = 4. Raumcurve 6ter Ordnung der R_3</u>, Schnitt einer Fläche 2. und einer Fläche 3ten Grades.

Betreffs der R_2 des Raumes sind wieder nur die zwei Fallunterscheidungen zu machen, wie soeben. Bei der R_1 aber, d.h. den geraden Linien, werden wir 4 Fälle auseinanderhalten müssen: der R_1 schneidet die C_6 entweder in 0 Punkten, oder in 1, 2, 3. Vierfaches Schneiden ist nicht möglich. Denn eine 4 fache Secante würde der F_2, welche durch die Curve geht, wie auch der F_3 ganz angehören müssen und als 0 einen

Teil der Schnittcurve vorstellen, die wir doch als irreducibel voraussetzen. Die dreifachen Secanten aber haben eine sehr einfache Bedeutung; sie stellen die geradlinigen Erzeugenden der F_2 vor und verteilen sich dementsprechend auf 2 Schaaren.

Daraufhin haben wir nur folgende linearen Schaaren von Specialgruppen:

1) Die $G_6^{(3)}$, welche von allen Ebenen des R_3 ausgeschnitten wird.

2). $\infty^3 G_6^{(2)}$ und $\infty^1 G_5^{(2)}$, ausgeschnitten von den Ebenen, welche durch einen festen Punkt durchlaufen.

3). $\infty^4 G_6^{(1)}$, $\infty^3 G_5^{(1)}$, $\infty^2 G_4^{(1)}$, ausgeschnitten von den Ebenen, welche durch eine feste Gerade laufen, die der C_6 bez. in 0, 1, 2 Punkten begegnet,

4). nicht etwa 2 ∞^1 sondern nur 2 $G_3^{(1)}$, den beiden Schaaren dreifacher Secanten entsprechend.

In der Tat liefert jede Gerade einer Schaar, wenn man durch sie schneidende Ebenen hindurchlegt, in den beweglichen Schnittpunkten dieser Ebenen dieselbe $G_3^{(1)}$, wie jede andere Gerade derselben Schaar; es handelt sich bei der $G_3^{(1)}$ einfach um die Gesammtheit der Punkttripel, welche auf der C_6, von den Geraden der anderen Schaar ausgeschnitten werden.

Diese Verhältnisse ad 4) und die Reciprocität zwischen den beiden $G_3^{(i)}$ sind für uns besonders bemerkenswerth.

Was uns hier die bekannte Theorie der geradlinigen Erzeugenden der Flächen 2ten Grades an die Hand gegeben hat, wird uns höher hinauf der Brill-Nöther'sche Reciprocitätssatz leisten, wobei dann die Frage nahe liegt, ob man die bez. Entwickelungen nicht allgemein in Zusammenhang bringen kann mit der Lehre von den linearen Räumen, welche auf den $\frac{p-2 \cdot p-3}{2}$ Flächen zweiten Grades liegen, die durch C_{2p-2} hindurchgehen?

Erwähnen wir doch noch der besonderen Möglichkeit, daß die F_2, auf welcher unsere C_6 liegt, in einen Kegel ausartet. Auf einem Kegel fallen die beiden Schaaren geradliniger Erzeugender, welche die allgemeine F_2 besitzt, in eine zusammen. So also auf der besonderen C_6 auch die beiden im Allgemeinen unterschiedenen $G_3^{(i)}$. Wichtiger wird, wie wir vorab bemerken, die Ausnahmestellung dieser besonderen C_6 erst später werden, wenn wir uns mit den dreifachen Tangentenebenen der Curve beschäftigen werden, die bei ihr (in der Theorie der Abel'schen Functionen) eine ganz entsprechende Rolle spielen, wie die 28 Doppeltangentenebenen der C_4. Wenn aber die C_6 insbesondere auf einem Kegel 2ten Grades liegt, dann hat sie alle die ∞ Tan=

gentenebenen des Kegels zu 3fachen Tangentenebenen; dann ist also die Zahl der letzteren unendlich groß. Wie ist dieser Specialfall in die allgemeine Theorie einzuordnen? Das wird eine der Fragen sein, mit denen wir uns weiterhin zu beschäftigen haben; einstweilen verweise ich auf Weber, wie auch auf Kraus l. c., wo gerade das hier bezeichnete Vorkommniß vom allgemeinen Standpunkte aus discutirt wird.

[Fr. 3.6.92] Zum Zwecke des allgemeinen Studiums der Specialgruppen beginnen wir damit, die Formeln des Brill-Cotherischen Reciprocitätssatzes heranzuziehen:

$$m + n = 2p - 2, \quad m - n = 2(\tau - 6).$$

Dieselben besagen, daß sich die Specialpunktgruppen auf der C_{2p-2} immer folgendermaßen gruppiren:
Man hat nebeneinander immer

eine $G_m^{\tau-1}$ und eine $G_n^{\sigma-1}$,

und jede G_m der ersten Schaar ist mit jeder G_n der 2ten Schaar zusammen der volle Schnitt der C_{2p-2} mit einer Ebene. Hinterher mögen wir dann die C_{2p-2} entweder von einer der G_n aus auf eine C_m der $R_{\tau-1}$ oder von einer der G_m aus auf eine C_n der $R_{\sigma-1}$ projiciren.

Die Frage ist nun die, wie viele solcher „complementärer" Paare $G_m^{\tau-1}$, $G_n^{\sigma-1}$ bei gegebenen (den Reciproci-

tätsbedingungen genügenden) Zahlen m, n, σ, τ vorhanden sein mögen? In dieser Hinsicht machen wir den folgenden Ansatz, der allerdings nur auf Plausibilität Anspruch machen kann, weil er Bedingungen als unabhängig zählt, die möglicherweise nicht unabhängig sind: wir werden erst später durch eine Hülfsbetrachtung zeigen, daß das Resultat wenigstens bei $\tau = 2$, im Allgemeinen richtig ist, aber für spezielle Gebilde auch hier versagt.

Wir bemerken erstlich, daß σ „Ebenen" im R_{p-1} einen linearen $R_{p-1-\sigma}$ gemein haben, der innerhalb des R_{p-1} von $\sigma(p-\sigma)$ Constanten abhängt. Wir bemerken ferner, daß es $(\sigma-1)$ Bedingungen ausmacht, wenn wir verlangen, ein solcher $R_{p-\sigma-1}$ solle unserer C_{2p-2} in einem Punkte begegnen. Aber wir wünschen, daß er ihr in m Punkten begegne, und da nehmen wir eben an, daß das die m-fache Zahl von Bedingungen sei, also $m(\sigma-1)$ Bedingungen. So bleiben von den Constanten des $R_{p-\sigma-1}$ noch $\sigma(p-\sigma) - m(\sigma-1)$ willkürlich.

Aber immer $\infty^{\tau-1}$ dieser $R_{p-\sigma-1}$ gehören zu einer $g_m^{\tau-1}$ zusammen. Bezeichnen wir also die Zahl der $g_m^{\tau-1}$, die es auf unserer C_{2p-2} giebt, mit ∞^{ϱ}, so folgt

$$\varrho = \sigma(p-\sigma) - m(\sigma-1) - (\tau-1)$$

oder, wenn wir σ vermöge der Reciprocitätsgleichungen durch τ und m ausdrücken:

$$\underline{\rho = p + \tau(m + 1 - p - \tau).} -$$

Hätten wir nach gleicher Methode die Zahl der $G^{(\sigma-1)}_{n}$ abgezählt, so wären wir zu derselben Zahl gekommen. – Die so erhaltene Formel für ρ benutzen wir nun mit Brill u. Nöther zur Discussion der Gränzfälle, d. h. derjenigen Fälle, wo bei gegebenem τ das m möglichst klein, bei gegebenem m das τ möglichst gross ist. Das Kriterium wird dabei sein, dass eine jede Zahlencombination möglich sein wird, bei welcher ρ nicht negativ ausfällt. Die Gränzfälle werden dann durch einen möglichst kleinen Wert von ρ charakterisirt sein. Um diesen zu finden, setzen wir

$$p = \pi . \tau + h \text{ (wo } h < \tau \text{, aber } \geq 0 \text{ sein soll).}$$

Die Formel für ρ lautet dann:

$$\rho = h + \tau(\pi + m + 1 - p - \tau),$$

worauf der Gränzfall $\rho = h$ eintreten wird, sobald man

$$\underline{m = p + \tau - \pi - 1}$$

nimmt. Zugleich ergiebt sich $\underline{\sigma = \pi}$, so dass wir die Bezeichnung π wieder einsparen können und folgendes Resultat haben:

<u>Um bei gegebenem τ den Gränzfall zu finden, setze man:</u> $p = \sigma . \tau + h \quad (0 \leq h < \tau),$

wir haben dann ∞^h Gränzschaaren $G^{\tau-1}_{p+\tau-\sigma-1}$.

Also wenn wir zunächst $\tau = 2$ nehmen, so werden wir unterscheiden, ob $p = 2\tau$ oder $= 2\tau+1$ gesetzt werden kann. Im ersten Falle finden wir auf der C_{2p-2} eine endliche Zahl von Gränzschaaren $G^1_{p/2+1}$, d. h. eine endliche Zahl von Möglichkeiten, die C_{2p-2} auf eine $(p/2+1)$ fach überdeckte Riemann'sche Fläche zu beziehen. Im zweiten Falle giebt es $\infty^1 G^1_{\frac{p+1}{2}+1}$. Beide Resultate sind schon von Riemann selbst angegeben (Abel'sche Functionen № 13.).

Oder wenn wir $\tau = 3$ setzen, so wird es sich darum handeln, die niedersten, ebenen Curven zu finden, auf welche man unsere C_{2p-2} beziehen kann. Wir müssen da unterscheiden, ob $p = 3\sigma$ oder $3\sigma+1$ oder $3\sigma+2$ gesetzt werden kann. Im ersteren Falle erhalten wir eine endliche Zahl ebener $C_{\frac{2p}{3}+3}$, im 2ten Falle ∞^1 ebene $C_{\frac{2p+1}{3}+2}$, im 3ten ∞^2 ebene $C_{\frac{2p+2}{3}+2}$, etc. etc.

Wir werden jetzt sehen, ob wir wenigstens das Resultat für $\tau = 2$ mit Hülfe des Riemann'schen Existenzsatzes verificiren können. Ich will dabei der Einfachheit halber an der Annahme $p = 2\tau$ festhalten.

Die Abzählung zeigt, daß eine Riemann'sche Fläche mit $(p/2+1)$ Blättern, wenn sie vom Geschlechte p sein soll, $3p$ Verzweigungspunkte, also $3p-3$ wesentliche Constante besitzt, d. h. ebensoviele, wie die allgemeine C_{2p-2}

selbst. Da ist nun eine doppelte Möglichkeit: Entweder liefert „im Allgemeinen" jede C_{2p-2} eine solche Riemann'sche Fläche, das ist natürlich, was wir wünschen, oder es geben die besonderen C_{2p-2}, welche $(p/2+1)$ blättrige Flächen liefern, deren immer gleich ∞ viele. Diese zweite Möglichkeit können wir nun an gegenwärtiger Stelle noch nicht ausschließen, es wird aber weiter unten durch ein Beispiel geschehen. Dagegen erfahren wir durch die Betrachtung der Riemann'schen Fläche selbst, wie unsere „Normalfläche" im besonderen Falle degeneriren kann. Man kann doch Riemann'sche Flächen auch mit geringerer Blätterzahl construiren, die gleichfalls das Geschlecht p haben: R.-Flächen mit $p/2-1$, $p/2-2$ .... 2 Blättern mit $3p-2$, $3p-4$, ... $2p+2$ Verzweigungspunkten. Wieder wollen wir annehmen, daß eine C_{2p-2}, welche eine solche Riemann'sche Fläche ergiebt, nicht nothwendig gleich ∞ viele Flächen derselben Art liefert. Wir erfahren dann, daß diese besonderen C_{p-2} nur von $3p-5$, $3p-7$ ... $2p-1$. Parametern abhängen, also durch 2, 4 ... $p-2$ Bedingungen gegenüber den allgemeinen specialisirt sind.

[Fr. 3.6.92] [I. Vorlesung] Nachdem wir so untersucht haben, welche Gränzschaaren $G_m^{\tau-1}$ auf der allgemeinen C_{2p-2} überhaupt vorkommen, wird es sich darum handeln die Anzahl der einzelnen $G_m^{\tau-1}$ genau festzulegen. Ist $\varrho = h = 0$, giebt es also

die $G_m^{\tau-1}$ nur in endlicher Zahl, so ist ohne Weiteres klar, was damit gemeint ist. Ist aber $\varrho = h > 0$, so wird man die $G_m^{\tau-1}$, um ein bestimmtes Problem zu haben, noch erst h „linearen" Bedingungen zu unterwerfen haben, also etwa der, dass bestimmte $h+\tau-1$ Punkte der Curve in einer G_m der Schaar vereinigt sein sollen.

Die so formulirte Frage ist nun im Falle $\underline{\tau = 2}$ ebenfalls schon von Brill und Nöther in ihrer Arbeit beantwortet worden: Brill hat dann neuerdings in Ann. 36 (1890) gezeigt, wie man durch wiederholte Anwendung des Cayley-Brill'schen Correspondenzprincips zu dem bezeichneten Resultate hinkommt; vergl. auch den jüngst erschienenen Aufsatz von Zeuthen in Ann. 40, I. Das Resultat ist bei geradem $p = 2\sigma$ durch die Formel $\frac{1}{\sigma}\binom{2\sigma}{\sigma-1}$ gegeben, bei ungeradem $p = 2\sigma+1$ durch $\frac{2}{\sigma}\binom{2\sigma+1}{\sigma-1}$. Hiernach giebt es beispielsweise bei $p = 4, 6, 8$ die Zahl der $G_3^{(1)}, G_4^{(1)}, G_5^{(1)}$ gleich $2, 5, 14$. Die gleichen Zahlen $5, 14$ findet man für die $G_4^{(1)}$ bei $p = 5$ und die $G_5^{(1)}$ bei $p = 7$.

Höhere Werte von τ sind dann von Castelnuovo in Betracht gezogen worden (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1889 II, p. 130). Castelnuovo beschränkt sich dabei auf den Fall $\varrho = h = 0$, also $p = \sigma.\tau$, und erhält für diesen Fall die allgemeine Formel (die für $\tau = 2$ mit der von Brill gegebenen stimmt):

$$\frac{1!\,2!\,\ldots\ldots(\sigma-1)!\;1!\,2!\,\ldots\ldots(\tau-1)!}{1!\,2!\,\ldots\ldots\ldots(\sigma+\tau-1)!}\,.\,p!$$

Hiernach haben wir beispielsweise für $p = 12$

einmal der Zerlegung $12 = 6.2$ entsprechend $132\ G_7^{(1)}$,

dann aber Zerlegung $12 = 4.3$ entsprechend $462\ G_{10}^{(2)}$,

es ist also auf 132 Weisen möglich, die im R_{11} gelegene C_{22} der φ des Falles $p = 12$ auf eine 7 fach überdeckte Gerade zu projiziren, und auf 462 Weisen, sie auf eine ebene Curve 10ter Ordnung zu projiziren!

Aber es ist nicht nur dieses Resultat, es ist insbesondere die Methode von Castelnuovo, die ich besprechen will. In der Tat ist dieselbe für uns besonders instructiv, weil sie alle die modernen Schlussweisen, über welche z. Z. die Curvenlehre verfügt, in wechselnder Verbindung benutzt; wir werden außerdem in der Lage sein, Castelnuovo's Ueberlegung gerade da, wo er dieselbe als unsicher bezeichnet, durch den Riemann'schen Existenzsatz auf sichere Basis zu stellen.

Castelnuovo beginnt damit, die Aufsuchung unserer $G_m^{\tau-1}$ durch ein aequivalentes Problem zu ersetzen, welches sich nicht mehr auf die C_{2p-2} der φ, im R_{p-1}, sondern auf eine beliebige der ∞^p Normalcurven C_{m+p} bezieht, welche man zu unserem algebraischen Gebilde vom Geschlechte p im R_m construiren kann. Insofern $m = p+\tau-\sigma-1$, hat eine solche C_{m+p}, wie man sofort abzählt, eine endliche Zahl p-fach schneidender $R_{m-\tau}$. Da ist nun

klar, daß die $\infty^{\tau-i}$ R_{m-i}, welche durch einen solchen $R_{m-\tau}$ hindurchlaufen, aus unserer C_{m+p} gerade eine $G_m^{\tau-i}$ ausschneiden. Andererseits aber ist auch klar, daß jede $G_m^{\tau-i}$ unseres Gebildes solcherweise aus der C_{m+p} ausgeschnitten werden kann. Sei nämlich G_m eine einzelne Punktgruppe einer solchen $G_m^{\tau-i}$, G'_m eine andere. Wir können dann durch G_m im R_m gerade einen R_{m-i} legen, der noch in einer Gruppe von p Punkten, G_p, schneidet. Nun sind G_m und G'_m aequivalent. Aber $G_m + G_p$ ist der Schnitt unserer C_{m+p} mit einem R_{m-i}, und alle Punktgruppen, die mit einem solchen Schnitt „aequivalent" sind, bilden selbst wieder einen derartigen Schnitt: das ist der Begriff der Normalcurve. Also: G_p liegt mit jeder der $\infty^{\tau-i}$ Gruppen G'_m in einem R_{m-i}, oder G_p ist der Schnitt unserer C_{m+p} mit einem $R_{m-\tau}$, u.s.w.

So hat denn Castelnuovo das Problem vor sich: die endliche Zahl der $R_{m-\tau}$ zu bestimmen, welche die C_{m+p} des R_m p-fach schneiden. Und hier nun benutzt er das „Princip der speciellen Lage". Er nimmt nämlich an, und das ist der hypothetische Teil seines Beweisganges, den wir erst sogleich stützen müssen, es sei möglich, die C_{m+p} so ausarten zu lassen, daß sie in eine C_m (d.h. eine rationale Normalcurve des R_m) und p Secanten derselben (C_1, welche der C_m jede zweimal begegnen) zerfällt! Für diese ausgeartete Curve wird nun die Abzählung zu machen sein.

Aber augenscheinlich zerfällt für die ausgeartete Curve die Aufsuchung der p mal schneidenden $\mathcal{R}_{m-\tau}$ in eine Reihe getrennter Probleme. Ein solcher $\mathcal{R}_{m-\tau}$ wird nämlich die C_m vielleicht ν mal treffen und dann noch $p-\nu$ der C_1 jede einmal zu schneiden haben. Da kann dann erstlich $\nu = 0, 1, \dots p$ genommen werden, zweitens können die $p-\nu$ in Betracht kommenden C_1 unter den p C_1 beliebig heraus gegriffen werden. Alle die Lösungen der so unterschiedenen Probleme werden wir hinterher zusammenzuaddiren haben.

Bei der Ausführung gestaltet sich das noch viel einfacher, als man zunächst erwartet. Es zeigt sich nämlich, daß die Zahl der Lösungen aller dieser Teilprobleme, sofern wir den einen Fall $\nu = 0$ ausnehmen, schlechthin $= 0$ ist: es giebt <u>keinen $\mathcal{R}_{m-\tau}$</u>, der eine rationale C_m in ν Punkten träfe und dabei $p-\nu$ beliebig gelegene (also nicht durch einen der ν Punkte laufende) Secanten der C_m schnitte, $\nu \geq 1$ genommen. Die $\infty^{\tau-1}$ durch einen solchen $\mathcal{R}_{m-\tau}$ laufenden $\mathcal{R}_{m-1}$ würden nämlich aus C_m eine $G^{\tau-1}_{m-\nu}$ ausschneiden, welche $(p-\nu)$ Punktpaare der C_m je in denselben $G_{m-\nu}$ vereinigt enthielte, was bei allgemeiner Lage der Punktpaare nicht möglich ist.

So bleibt denn, daß wir abzählen, <u>wieviele $\mathcal{R}_{m-\tau}$ es giebt, welche irgend p gegebene C_1 treffen</u>, also eine Fragestellung, bei der die C_m völlig zur Seite tritt, die mit der Lehre von den algebraischen Curven nichts mehr zu tun hat, und die in die Elemente der mehrdimensionalen

Geometrie gehört. Und die Fragestellung erledigt man wieder durch das Princip der speciellen Lage. Schubert hat zuerst für derartige Fragen in Ann. 26 den erforderlichen Ansatz gegeben (1885: Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes) und dann Castelnuovo den Gegenstand mit viel grösserer Allgemeinheit behandelt (eben auch 1889 in den Rendiconti dei Lincei, p. 71 ff). Die mitgeteilte Zahl der $G_m^{\tau-i}$, bez. der hier gesuchten $R_{m-\tau}$ ist nur ein ganz specieller Fall der da entwickelten Theorie.

Wir begleiten dieses Referat noch mit folgenden Bemerkungen:

1). Die Behandlung der zerfallenden Curve beruhigt uns über einen Punct, der oben unentschieden blieb. Wir hatten damals gewünscht an einem Beispiele zu sehen, dass die Existenz einer Gränzschaar $G_m^{\tau-i}$ in dem Falle, wo unserer allgemeinen Abzählung nach nur eine endliche Zahl von $G_m^{\tau-i}$ auftreten soll, nicht notwendig die Existenz unendlich vieler $G_m^{\tau-i}$ nach sich ziehen möchte.

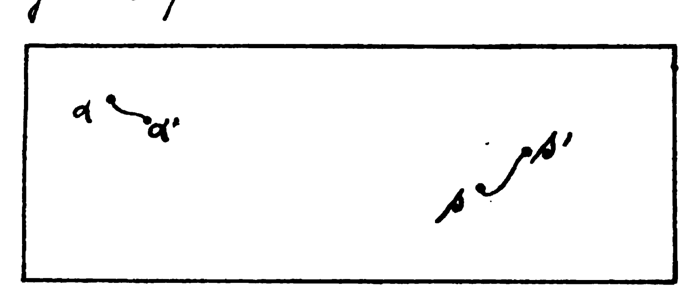
Ein solches Beispiel wird uns jetzt durch die zerfallende C_{m+p} geliefert. Denn man kann den p linearen C_1 sofort eine solche Lage geben, in der sie gewiss nicht von unendlich vielen $R_{m-\tau}$ gemeinsam ge-

schnitten werden.

2). Der Riemann'sche Existenzsatz gestattet uns in der Tat, die allgemeine C_{m+p} der R_m in die zerfallende Curve übergehen zu lassen. Man projicirt die C_{m+p} irgendwie auf einen R_1, wobei eine $(m+p)$ blättrige Riemann'sche Fläche mit $(2m-2+4p)$ Verzweigungen entstehen wird. Durch diese Fläche wird rückwärts die C_{m+p}, so zu sagen, eindeutig bestimmt sein. Denn die C_{m+p} ist doch nur ein geometrisches Gegenbild derjenigen G_{m+p} unserer Fläche, welche mit irgend $(m+p)$ übereinander gelagerten Punkten der Fläche aequivalent sind.

Wir werden also die möglichen Ausartungen der C_{m+p} studiren, indem wir die Riemann'sche Fläche auf alle Weisen ausarten lassen, und dieses bewerkstelligen wir auf Grund des Riemann'schen Existenzsatzes einfach so, daß wir die Verzweigungspunkte der Fläche irgendwie sich vereinigen lassen. Man denke sich jetzt die $(p+m)$ blättrige Fläche folgendermaßen aufgebaut. Man nehme zunächst eine m-blättrige Fläche mit $(2m-2)$ Verzweigungspunkten, also vom Geschlechte 0. Über diese schichte man p einfache Blätter und befestige dann ein jeder derselben an die m-blättrige Fläche mit Hülfe von vier Verzweigungspunkten $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, die so in dem einzelnen Blatte gelegen sein mögen (und so durch

Verzweigungsschnitte verbunden sein mögen), wie nachstehende Figur aufweist:



Zu der so construirten Riemann'schen Fläche gehört dann gewiss eine C_{m+p}. Und nun lasse man die Fläche so ausarten, dass die Verzweigungspunkte α und α', wie β und β', in jedem der p einzelnen Blätter zusammenrücken. Dann zerfällt die Fläche wieder in den anfänglichen m blättrigen Bestandteil und in die p einzelnen Blätter, wobei ersterer $2p$, jedes der letzteren 2 „Narben" tragen wird, d. h. Stellen, an denen ursprünglich der Zusammenhang mit den anderen Blättern statt hatte, der nun durch das Zusammenrücken der Verzweigungspunkte aufgelöst ist. Das heisst aber geradezu, dass die zugehörige C_{m+p} in $C_{m+p} \cdot C_1$ zerfällt und dass diese C_1 <u>Secanten</u> der C_m sind: die Stellen, in denen die C_m den verschiedenen C_1 einer jeden zweimal begegnet, sind eben das Gegenbild der „Narben", die wir auf den verschiedenen Bestandtei-

len der zerfallenden Riemann'schen Fläche vorhanden.

Soweit unser Bericht über die C_{2p-2} der φ. Derselbe schloss sich an die voraufgehende Erläuterung der *allgemeinen* Normalcurven an (wobei wir freilich nur die Fälle $p=0$ und $p=1$ ausführlicher betrachtet hatten). Nunmehr sollte als 3ter Teil unserer Entwicklungen eine *Theorie der Teilcurven* folgen, welche aus unseren Normalcurven durch Projection entstehen können. Aber es ist Zeit hier mit unserem Referate über die algebraischen Raumcurven überhaupt abzubrechen. Nennen wir also nur noch die wichtige Litteratur, welche hier zu berücksichtigen sein würde. Es sind dies vor allen Dingen die beiden grossen Abhandlungen von *Halphen* und *Nöther*, die 1882 von der Berliner Akademie mit dem Steinerpreis gekrönt wurden.*) Beide behandeln die Theorie der Raumcurven, d. h. der Curven im 3fach ausgedehnten Raume, in sehr viel ausgedehnterem Maasse als bis dahin geschehen war; Halphen (dessen Arbeit im cah. 52 des Journal de l'Ecole Polytechnique 1882 veröffentlicht ist), knüpft dabei an seine oben

---

*) vergl. auch die Arbeit von *Valentiner* in Acta Math. II, 1882

besprochenen Sätze von 1870 an, indem er übrigens eine Form der Darstellung benutzt, die von unserem Standpunkte aus durchzudenken bleibt. Demgegenüber erscheint uns die Darstellungsweise von Nöther (vergl. Berliner Abhandlungen von 1883 oder auch den Auszug in Crelle's Journal Bd. 93, 1882) wesentlich zugänglicher. Immer wäre die Frage, ob sich nicht dadurch Vereinfachungen und gleichzeitig natürlich Verallgemeinerungen erzielen liessen, wenn man genau so, wie wir es hier begannen, die Theorie der Normalcurven voranstellte und dann nicht nur nach denjenigen Teilcurven fragte, welche durch Projection der Normalcurven im R_3 entstehen können, sondern die Untersuchung gleich auf Teilcurven in beliebig ausgedehnten Räumen erstreckte.

(Pfingstferien)

[Abs. 13.6.92.]

Dritter Teil: Von den symmetrischen Riemann'schen Flächen.

(mit Heranholung von Entwickelungen aus der Theorie der Abel'schen Functionen).

Wir haben uns gegen Schluss des Wintersemesters bereits darüber geeinigt, wie gegenwärtige Vorlesung weitergeführt werden soll; wir modificiren das jetzt nur insoweit, als wir die Theorie der symmetrischen Flächen und

die geplanten Anwendungen der Abel'schen Functionen ineinander schieben. Symmetrische Flächen resp. Gebilde sind solche, zu denen algebraische Gleichungen mit reellen Coefficienten gehören, wie sogleich noch näher auszuführen sein wird. So sind es vorwiegend Realitätstheoreme, welche ich hier im Sinne habe. Was ich bislang von diesen Theoremen publicirt habe (so die Einteilung der symmetrischen Flächen in meiner Schrift von 1881), hat nur wenig Anklang gefunden. Ich meine aber, daß das nicht am Gegenstande der Untersuchung liegt, der mir vielmehr das größte Interesse zu verdienen scheint, sondern an der knappen Form, mit der ich meine Resultate darstellte.

I Elementarer Teil der Theorie.

A. Definition der symmetrischen Flächen; Stellung derselben innerhalb der Riemann'schen Theorie.

Läßt sich eine Fläche conform auf sich abbilden, so kann dies entweder ohne Umlegung der Winkel oder mit einer solchen geschehen.*) Wir unterscheiden demnach Transformationen „erster" Art, S, u. Transformationen

*) Nur bei „Doppelflächen" würde sich diese Unterscheidung nicht aufrecht erhalten lassen, aber Riemann'sche Flächen sind keine Doppelflächen; wo Doppelflächen fernerhin bei uns vorkommen, gelten sie ausdrücklich als doppelt überdeckt!

„zweiter" Art Σ. Dem entspricht bei analytischer Formulirung die Unterscheidung, daß ein algebraisches Gebilde $f(s,z)=0$ entweder durch eine Transformation der folgenden Art: $s'=r_1(s,z),\ z'=r_2(s,z)$ in sich übergehen kann, oder aber durch eine Transformation $s'=r_1(\bar{s},\bar{z}),\ z'=r_2(\bar{s},\bar{z})$, unter $\bar{s},\bar{z}$ die conjugirten Werte zu s,z verstanden.

Symmetrisch werden wir die Fläche bez. das algebraische Gebilde nennen, wenn es durch eine Transformation Σ von der Periode 2 (für welche also $\Sigma^2=1$ ist) in sich selbst übergeht. Hat $f(s,z)=0$ reelle Coëfficienten, so definirt es natürlich ein symmetrisches Gebilde. Denn die Gleichung $f=0$ wird sich nicht ändern, wenn man $s'=\bar{s},\ z'=\bar{z}$ setzt. Aber das Wichtige ist, daß auch das Umgekehrte gilt: Unter den unendlich vielen algebraischen Gleichungen $f(s,z)=0$, die zu einer Riemann'schen Fläche gehören, giebt es, wenn die vorgelegte Fläche symmetrisch ist, insbesondere solche, welche durchaus reelle Coefficienten haben.

Zum Beweise betrachte man zunächst eine beliebige algebraische Function $u+iv$ der Fläche. Sei $u+iv$ insbesondere der Wert, den sie in einem Punkte O der Fläche annimmt, u_1+iv_1 der Werte in dem zu O symmetrischen Punkte O_1. Verpflanzt man dann den Wert u_1-iv_1 nach O, so wird man damit eine neue algebraische Function der Fläche ha-

ben; in σ_1 wird dieselbe den Wert $u - iv$ aufweisen. Nun bilden wir

$$U + iV = (u + iv) + (u_1 - iv_1)$$
$$= (u + u_1) + i(v - v_1)$$

und haben damit eine algebraische Function der Fläche, welche an den symmetrischen Stellen der Fläche conjugirt imaginäre Werte aufweist, welche sich selbst symmetrisch ist, wie wir in Kürze sagen können. Da genügt es denn, s und z speciell als zwei solche sich selbst symmetrische Functionen der Fläche zu wählen, um eine Gleichung $f(s, z) = 0$ zu erhalten, welche notwendigerweise reelle Coefficienten hat.

Die so definirten symmetrischen Flächen subsumiren sich natürlich unter die allgemeinere, im Wintersemester wiederholt betrachtete Flächenklasse der *Riemann'schen Flächen mit eindeutigen Transformationen in sich*. Bei letzteren werden wir solche Flächen unterscheiden, welche blos durch Transformationen S in sich übergehen, und andere, bei denen neben S auch Transformationen Σ vorhanden sind. Auf alle Fälle bilden die S für sich, ebenso wie die S und Σ zusammen, eine „Gruppe"; sind Transformationen Σ vorhanden, so bilden die S innerhalb der Gesammtgruppe eine „ausgezeichnete" Untergruppe vom „Index 2". Ist N die Ge-

sammtzahl der Operationen, so kann man die Fläche mit einer Einteilung in N Parzellen versehen, derart, daß jede der Parzellen in jede der anderen durch eine der N Operationen überführbar ist. Wir nennen dementsprechend die Fläche eine <u>reguläre</u> Fläche, oder wenn Operationen Σ vorhanden sind, eine <u>reguläre symmetrische</u>. Dabei braucht keine der Operationen Σ gerade die Periode 2 zu haben; so oft es aber eine Operation Σ von der Periode 2 in der Gesammtgruppe giebt, so oft ist die Fläche im niederen Sinne „symmetrisch". Man nehme etwa als Beispiel einer regulär symmetrischen Einteilung die Zerlegung der Kugelfläche in die 120 abwechselnd [Zi. 14.6.92] symmetrischen und congruenten Ikosaederdreiecken. Hier sind 16 Operationen von der Periode 2 vorhanden. Es sind dies erstlich die Spiegelungen an den 15 „Symmetrieebenen" des Ikosaeders, dann die Zusammenordnung diametraler Kugelpunkte. Ich könnte ebensowohl die Gebietseinteilungen der Kegel hier heranziehen, welche in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen, oder allgemeiner der automorphen Functionen, studirt werden. Der Unterschied ist nur, daß es sich da um unendliche Gruppen von S oder Σ handelt. Wir beschränken uns in der Folge zumeist auf Riemann'sche

Flächen mit $p > 1$. Da können solche unendliche Gruppen von S oder Σ niemals auftreten, weil die Gesammtzahl der S resp. Σ, durch welche die Fläche in sich übergehen kann, für $p > 1$, wie wir schon im Wintersemester lernten, notwendig eine endliche ist. Wir werden darum bei $p > 1$, um eine bestimmte reguläre oder regulär-symmetrische Einteilung einer vorgelegten Fläche zu erhalten, nicht erst, wie bei der Kugel, die Gruppe der bei der Einteilung zu Grunde zu legenden S oder Σ willkürlich auszusuchen brauchen, sondern einfach die Gesammtgruppe der S oder Σ nehmen die es überhaupt giebt. Wir erwähnten bereits auf p. 207 der Winterautographie, dass sich Hr. Dyck in seiner Dissertation und in Ann. 17 (1879-80) damit beschäftigt hat, alle regulären und regulär-symmetrischen Flächen aufzuzählen, welche bei $p = 1, 2, 3$ existiren. Es wäre wohl wünschenswert, diese Untersuchung jetzt ein Stück weiterzuführen, nachdem man in der Zwischenzeit sich so sehr viel mehr an die dabei nötig werdenden gruppentheoretisch-geometrischen Operationen mit Riemann'schen Flächen gewöhnt hat. Dabei werden die Sätze wesentlich in Betracht kommen, welche Hr. Hurwitz in den Göttinger Nachrichten von 1887, resp. den Annalen Bd. 32 gegeben hat. Auch Bd. 41 der Annalen wird neue Untersuchungen von Hurwitz über reguläre Riemann'sche Flächen bringen. Wir selbst gehen auf diese allgemeinen Fragen hier nicht näher ein, son-

dern beschränken uns auf kurze Betrachtung <u>der hyperelliptischen Flächen.</u>

Eine hyperelliptische Fläche, welche der Gleichung zufolge:

$$s = \sqrt{f_{2p+2}(z)}.$$

2blättrig über der z Ebene ausgebreitet ist, geht immer durch die Operation $S: s' = -s, z' = z$, d. h. durch bloße Vertauschung der übereinanderliegenden Blätter, in sich über. Mit der Identität zusammen bildet diese S eine G_2. Dieselbe erweitert sich zu einen G_4, wenn die Coefficienten von $f(z)$ durchweg reell sind. Es treten dann nämlich folgende zwei Operationen zweiter Art hinzu:

$$\Sigma_1: \qquad s' = \bar{s}, \; z' = \bar{z};$$
$$\Sigma_2: \qquad s' = -\bar{s}, \; z' = \bar{z}.$$

Erstere wird als Spiegelung der Fläche an der Axe der reellen Zahlen schlechtweg bezeichnet werden dürfen, letztere als Verbindung der genannten Spiegelung mit der S, d. h. der Vertauschung der beiden Blätter. Zerspalten wir die hyperelliptische Fläche in zwei übereinanderliegende Blätter, indem wir so einfach längs der Verzweigungsschnitte, durch welche die Blätter miteinander verbunden sind, zerschneiden, so haben wir eine der G_2 entsprechende reguläre Einteilung der Fläche, zerlegen wir demnach jedes der Blätter, nachdem wir vorab die Verzweigungsschnitte symmetrisch geordnet haben,

durch einen längs der reellen Axe geführten Schnitt in 2 symmetrische Hälften, so haben wir eine der G_2 zugehörige regulär-symmetrische Einteilung.

Dieses Beispiel der hyperelliptischen Flächen mit reellen f_{2p+2} wird in der Folge sehr oft herangezogen werden. (Wir nennen dabei das f_{2p+2} reell, während doch nur die Gleichung $f_{2p+2}=0$ reelle Coefficienten zu haben brauchte. In der Tat können wir im letzteren Falle f_{2p+2} selbst immer reell wählen. Wir brauchen nur den imaginären Factor, der sich gegebenenfalls aus allen Gliedern von f abtrennen lässt, auf das s zu werfen. In der Folge stellen wir uns immer vor, dass dies bereits vorweg geschehen sei).

B. Von der Aufzählung aller symmetrischer Flächen.

1. Wir beginnen damit, anzugeben, auf wieviel verschiedene Weisen eine Kugel mit sich selbst symmetrisch sein kann (d.h. durch eine Σ von der Periode 2 in sich selbst übergehen kann). Das ist offenbar auf 2 wesentlich verschiedene Arten möglich: das eine Mal bezieht man die Kugel auf sich selbst durch eine Central=projection, deren Centrum ausserhalb liegt:

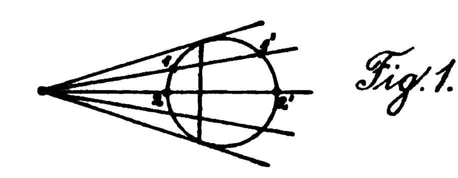


Fig. 1.

(1,1'; 2,2'; ... sind entsprechende Punkte), das zweite Mal durch eine Centralprojection, deren Centrum sich innerhalb der Kugel befindet:

Fig. 2.

Im ersten Falle giebt es auf der Kugel eine sogenannte *Symmetrielinie*, deren Punkte bei der Umformung sämtlich festbleiben, das ist der Schnitt der Kugel mit der Polarebene des Projectionscentrums; im 2ten Falle giebt es eine solche Symmetrielinie nicht. Wir haben damit dasjenige Unterscheidungsmerkmal, nach welchem wir sogleich die symmetrischen Flächen überhaupt einteilen: nach *der Zahl und Art der Symmetrielinien*.

Erwähnen wir da gleich die Terminologie, welche ich anläßlich der Figuren 1 und 2 in Vorschlag gebracht habe. Figur 1 kann insbesondere so gezeichnet werden, daß das Projectionscentrum unendlich weit liegt. Die Polarebene wird dann eine Diametralebene und die zugehörige Centralprojection eine orthogonale Projection. Ich sage dementsprechend überhaupt von der Figur 1, die Kugel sei bei derselben *orthosymmetrisch* auf sich selbst bezogen. Die bei Figur 2 vorliegende Beziehung aber nenne ich *diasymmetrisch*, insofern bei ihr

das Projectionscentrum, insbesondere in den Mittelpunkt der Kugel rücken kann, worauf je zwei diametrale Punkte der Kugel zusammengeordnet erscheinen. Diese Benennungen „orthosymmetrisch" u. „diasymmetrisch" übertrage ich dann demnächst in noch zu erklärender Weise auf die Flächen eines beliebigen p.

2. Wir betrachten jetzt fernerhin zunächst die hyperelliptischen symmetrischen Flächen, d. h. die Gebilde $s=\sqrt{f_{2p+2}(z)}$ mit reellem f. Wie steht es bei ihnen mit den Symmetrielinien? Sei es, daß man die Operation Σ_1 oder Σ_2 zu Grunde legt? Offenbar müssen wir unterscheiden, wieviele reelle Wurzeln $f=0$ haben mag, wieviele andererseits paarweise complex conjugirt sein mögen. Wir erhalten da eine Reihe leicht verständlicher Sätze, die wir hier ohne ausführlichen Beweis hintereinander aufführen mögen.

[Di. 15. 6. 92.] a: Es seien 2μ der Verzweigungspunkte reell wo $\mu > 0$. Die x Axe wird dann in μ Segmente zerfallen, längs deren f abwechselnd positiv u. negativ ist. Für die Operation Σ_1 bilden nun diejenigen μ auf der hyperelliptischen Fläche gelegenen, geschlossenen Curven die Symmetrielinien, welche über den Segmenten mit positivem f liegen. Andererseits geben die μ Curven, welche über den Segmenten mit negativem f

liegen die Symmetrielinien für Σ_2.*).

<u>b. Alle Verzweigungspunkte seien imaginär.</u> Wir denken uns f (welches jetzt eine definite Form sein wird) der Einfachheit halber als positive Form. Dann bleiben bei Σ_2 überhaupt keine Punkte der Fläche fest: es giebt für Σ_2 keine Symmetrielinie. Dagegen bleiben bei Σ_1 alle Punkte fest, welche oberhalb der x Axe liegen. Und hier müssen wir unterscheiden, ob p gerade ist oder ungerade. Man denke sich die Verzweigungsschnitte der hyperelliptischen Fläche in einfachster Weise so geordnet, daß man je 2 conjugirt imaginäre Verzweigungspunkte geradlinig durch einen Schnitt verbindet:

$p = 0$ $\qquad\qquad$ $p = 1$

Da sieht man, daß die Punkte der hyperelliptischen Fläche, welche oberhalb der x Axe liegen, im Falle eines geraden p einen einzigen Curvenzug bilden, im Falle eines ungeraden p aber zwei. <u>Wir haben also für Σ_1 eine</u>

---

*) Die Regel ist einfach: Bei Σ_1 bleiben diejenigen Punkte fest, welche reelles x und reelles s besitzen, bei Σ_2 die anderen, welche reelles x und rein imaginäres s besitzen.

oder zwei Symmetrielinien, jenachdem $p = 0$ oder $= 1$ (mod. 2).

c. Wir übertragen nun die Benennungen orthosymmetrisch und diasymmetrisch auf unsere hyperelliptischen Flächen (wie bald auf die symmetrischen Flächen überhaupt). Orthosymmetrisch soll eine symmetrische Fläche heißen, die längs der Symmetrielinien zerschnitten in 2 Stücke zerfällt; diasymmetrisch dagegen eine solche, welche nach Zerschneidung entlang sämmtlicher Symmetrielinien immer noch ein zusammenhängendes Ganze bildet. Da ist ersichtlich:

Die Flächen mit $\mu = 1, 2, \dots p$ sind diasymmetrisch, sowohl für Σ_1 als Σ_2.

Ebenso zeigt die Fläche $\mu = p+1$ für Σ_1 und Σ_2 übereinstimmend orthosymmetrisches Verhalten.

Die Fläche $\mu = 0$ ist gegenüber Σ_2 (insofern da gar keine Symmetrielinie vorhanden ist) diasymmetrisch, gegenüber Σ_1 aber orthosymmetrisch.

Also zusammenfassend: Die hyperelliptischen symmetrischen Flächen ergeben uns Beispiele für

diasymmetrische Flächen mit $0, 1, \dots p$ Symmetrielinien, und für orthosymmetrische Flächen mit 1 oder 2 und mit $p+1$ Symmetrielinien.

Dies sind im Ganzen $p+3$ Arten hyperelliptischer symmetrischer Flächen, wobei ich das Wort „Art" gleich so ge-

brauche, wie es fernerhin geschehen soll, dass ich alle diejenigen symmetrischen Flächen zu derselben Art rechne, welche erstens denselben allgemeinen Character haben (d. h. gleichzeitig orthosymmetrisch oder diasymmetrisch sind) und übrigens dieselbe Zahl von Symmetrielinien besitzen.

Habe ich nun damit Beispiele für alle Arten symmetrischer Flächen, die es giebt? Ich behaupte, dass das in der Tat der Fall ist, was die diasymmetrischen Fälle angeht, dass es dagegen, allgemein zu reden, noch eine grössere Zahl orthosymmetrischer Fälle giebt, nämlich überhaupt orthosymmetrische Fälle mit $p+1, p-1, p-3 \ldots\ldots$ Symmetrielinien (wo die Differenz zwischen $p+1$ und der Zahl λ der Symmetrielinien allemal gerade ist). Von diesen orthosymmetrischen Fällen ist dann jeweils nur der erste und der letzte unter den hyperelliptischen Fällen vertreten.

Um dies zu beweisen (womit wir dann eine allgemeine Aufzählung aller symmetrischer Flächen geben), bemerken wir der Reihe nach Folgendes:

3a. Wir haben die geschlossenen Flächen [Fr. 18.6.92.] früher schon eingeteilt in einfache Flächen und Doppelflächen, d. h. in Flächen, bei denen man

zwischen den beiden Flächenseiten unmittelbar unterschei-
den kann, und solche, bei denen die beiden Flächensei-
ten unmittelbar zusammenhängen und ein untrenn-
bares Ganze bilden. Für die Riemann'sche Theorie kom-
men direct nur die einfachen Flächen in Betracht. Dar.
beschränken wir uns bei der Aufzählung der symmetrischen
Flächen ausdrücklich auf die einfachen Flächen. Das schließt
nicht aus, daß die Doppelflächen indirect für uns von beson-
derer Wichtigkeit werden. Man denke sich nämlich eine
solche Doppelfläche beiderseitig, d. h. vollständig mit einer
Membran überzogen: Diese Membran bildet dann eine
einseitige Fläche von doppelter Ausdehnung, welche so,
wie sie über sich selbst hinlaufend auf der Doppelfläche
aufliegt, offenbar symmetrisch auf sich selbst bezogen ist. Die
Membran giebt uns also ein Beispiel einer symmetrischen
Fläche und zwar einer symmetrischen Fläche ohne Symetrielinie
(insofern wir die Betrachtung an einer <u>geschlossenen</u> Doppelfläche
durchführen). Ich erinnere hier gleich an die einfachsten Bei-
spiele geschlossener Doppelflächen, die wir haben. Das ist für $p = 0$
die unbegränzte Ebene der projectiven Geometrie (die durch das Un-
endlichweite hindurch in sich selbst zurückläuft), für $p = 1$ der
in sich selbst nach einer Umstülpung
zurückkehrende Ring (oder Kautschuk-
Schlauch). Fügen wir an diese Ebene, bez.

diesen Ring eine beliebige Zahl, ϱ, von „Handhaben" an so wächst das p um 2ϱ Einheiten.[x]) (In der Tat ist unter dem p einer Doppelfläche, wie wir früher ausführten, zweckmässigerweise gleich das p jener einfachen Fläche zu verstehen, welche wir über die Doppelfläche zweifach ausbreiten; anderenfalls würde man die Definition des p auf Doppelflächen garnicht ohne weiteres übertragen können).

b. Sei nun eine symmetrische Fläche vorgelegt.

Wir nehmen an, dass ein Punkt O derselben bei der symmetrischen Umformung Σ durch welche die Fläche in sich übergeht, ungeändert bleibt. In der Nähe von O hat Σ notwendig den Charakter einer gewöhnlichen Spiegelung, d. h. es giebt ein durch O hindurchlaufendes Linienelement, welches bei Σ festbleibt (und die übrigen Punkte, welche vermöge Σ paarweise zusammengeordnet werden, von einander trennt). Wir gehen auf diesem Linienelement ein Stück vorwärts und wiederholen dieselbe Ueberlegung. Da ist ersichtlich, dass wir, so fortschreitend, von O aus eine ganze über die Fläche hinlaufende Linie solcher Punkte bekommen, die bei Σ festbleiben, d. h. eine Symmetrielinie.

Das ist genau das Umgekehrte von dem, was wir erhalten, wenn wir annehmen, unsere Fläche gehe durch eine Operation erster Art, S, in sich über. Bleibt O bei der Operation S unverändert, so hat S in der Nähe von O den Charakter einer Drehung: O ist notwendig ein isolirter

x) womit wir denn Beispiele geschlossener Doppelflächen für jedes p vor Augen haben

Fixpunkt. Uebrigens werden wir annehmen, daß jede bei Σ auftretende Symmetrielinie in sich zurückläuft. Wäre dies nicht der Fall, so müßte die Symmetrielinie sich über unsere Fläche spiralig hinwinden, was zu transcendenten Beziehungen führen würde, die bei algebraischen Gebilden, und auf solche wollen wir hinaus, sicher nicht vorkommen können. Ferner bemerke man, daß zwei Symmetrielinien der Fläche sich nie schneiden können (so wenig wie eine Symmetrielinie sich selbst überkreuzen kann). Denn von jedem einzelnen bei Σ festbleibenden Punkte O der Fläche aus läuft nur eine einzige bei Σ festbleibende Richtung aus.

c. Welches sind nun, was die Zahl und Art der Symmetrielinien angeht, die verschiedenen bei einer „einfachen" Fläche vorhandenen Möglichkeiten? Ist die Fläche diasymmetrisch, d. h. zerfällt sie nicht, wenn man sie längs der Symmetrielinien zerschneidet, so kann die Zahl sicher nicht größer als p sein. Denn eine Fläche vom Geschlechte p läßt nach der allgemeinen Theorie des Flächenzusammenhanges überhaupt nicht mehr als p nicht zerstückende Rückkehrschnitte nebeneinander zu. Nun gab uns aber schon der hyperelliptische Fall Beispiele diasymmetrischer Flächen mit 0, 1, ... p Symmetrielinien. Alle diese Zahlen von

Symmetrielinien kommen also bei den diasymmetrischen Flächen wirklich vor. Wir nehmen zweitens an, die Fläche sei orthosymmetrisch, sie zerfalle also bei der Zerschneidung der Fläche in zwei symmetrische Stücke.

Wir werden rückwärts die allgemeinste orthosymmetrische Fläche aufbauen, indem wir eines dieser beiden Stücke beliebig annehmen und mit seiner symmetrischen Wiederholung in zweckmäßiger Weise zusammenfügen. Habe nun dies einzelne Stück λ Randcurven und gehöre übrigens zum Geschlechte π, d. h. es soll möglich sein, auf demselben π, aber auch nicht mehr, nicht zerstückende Rückkehrschnitte nebeneinander anzubringen.

Dieselben Zahlen λ, π werden dann für das symmetrische Stück gelten. Und fügen wir nun die beiden Stücke durch Vereinigung ihrer Randcurven zur geschlossenen Fläche zusammen, so wird diese durch $2\pi + \lambda$ Rückkehrschnitte notwendig in 2 Stücke zerfallen, also $2\pi + \lambda - 1$ nebeneinander bestehende nicht zerstückende Rückkehrschnitte zulassen. Da haben wir also $p = 2\pi + \lambda - 1$, d. h. $\lambda = p + 1 - 2\pi$, wo π nur der einen selbstverständlichen Bedingung unterliegen wird, daß $\lambda > 0$ sein muß. Wir erhalten so, was die Zahl der Symmetrielinien orthosymmetrischer Flächen angeht, in der Tat alle die Fälle $\lambda = p+1,\ p-1,\ p-3, \ldots$, deren Existenz wir eben behauptet hatten. Und nun sage ich

schließlich, daß es keine anderen symmetrischen Flächen geben kann, als eben diasymmetrische und orthosymmetrische: <u>es ist unmöglich, daß eine symmetrische Fläche bei Zerschneidung längs der Symmetrielinien etwas Anderes angäbe, als entweder ein Stück, welches zu sich selbst symmetrisch ist, oder zwei Stücke, die einander symmetrisch entsprechen.</u> Sicher müssen doch alle Stücke, welche bei der Zerschneidung entstehen, entweder sich selbst symmetrisch sein oder paarweise als symmetrische zusammengehören. Nun füge man, jenachdem jedes einzelne Stück entweder mit sich selbst oder mit dem zugehörigen Stück längs der Symmetrielinien, welche es trägt, zusammen. So erhält man lauter geschlossene Flächen, deren Inbegriff mit der ursprünglich gegebenen, geschlossenen Fläche gleichbedeutend sein soll, das heißt aber doch, daß wir bei unserer Construction nur eine geschlossene Fläche erhalten dürfen, und eben dies bedeutet, nur in anderer Formulirung, unser Satz.

4). Wir werden uns jetzt <u>einfache Repräsentanten</u> der sämmtlichen Arten symmetrischer Flächen bilden, indem wir das Princip aufnehmen, von dem wir schon unter 1) beiläufig Gebrauch machten, um eine diasymmetrische Fläche mit null Randcurven zu construiren. Wir dachten uns damals eine geschlossene Doppelfläche zweifach mit einer Membran überdeckt. Genau so wollen wir uns jetzt eine beliebige Fläche,

die λ Randcurven besitzen mag, doppelt überdeckt denken und die beiderseitigen Überdeckungen jedesmal längs der Randcurve aneinanderheften. In der so gewonnenen Membran haben wir dann ersichtlich eine symmetrische Fläche mit λ Symmetrielinien vor uns. War die ursprünglich gegebene Fläche „einfach", werden also ihre beiden „Flächenseiten" durch die Randcurven von einander abgetrennt, so wird die construirte symmetrische Fläche orthosymmetrisch sein, diasymmetrisch aber, wenn die ursprünglich gegebene Fläche eine Doppelfläche war. Sei im ersten Falle π das Geschlecht der gegebenen [mit λ Randcurven ausgestatteten] Fläche. Wir verstehen darunter, daß man auf ihr nebeneinander π nicht zerstückende Rückkehrschnitte ziehen kann. Das Geschlecht der orthosymmetrischen Fläche, welche wir construiren, wird dann ersichtlich $p = 2\pi + \lambda - 1$.

Sei andererseits im Falle, daß eine Doppelfläche vorgegeben wird, p' das Geschlecht der diese Fläche zweifach überdeckenden Membran, also die Zahl der Rückkehrschnitte, welche man neben den 2λ Randcurven auf der Membran anbringen kann, ohne sie zu zerstücken.

Unsere diasymmetrische Fläche entsteht aus besagter Membran, indem man die in den Randcurven zusammenstoßenden Teile derselben aneinander heftet. Das Geschlecht der diasymmetrischen Fläche wird daher $p = p' + \lambda$.

5. Ersichtlich kann man jede orthosymmetrische Fläche in der hiermit geschilderten Weise durch Aussenseite und Innenseite einer „einfachen" Fläche ersetzen: kann man doch als solche einfache Fläche die eine der beiden Hälften selbst nehmen, in welche die orthosymmetrische Fläche durch Zerschneidung längs der Symmetrielinien zerfällt.

Nun ist bekannt (Moebius, Theorie der Elementarverwandschaft, Werke II, C. Jordan, in Liouvilles Journal 1866), dass zwei einfache Flächen, welche dasselbe Geschlecht π und dieselbe Anzahl λ von Randcurven besitzen, im Sinne der Analysis situs aequivalent sind, d. h. stetig eindeutig aufeinander bezogen werden können. Dasselbe gilt also auch von den orthosymmetrischen Flächen desselben p und desselben λ, d. h. von den orthosymmetrischen Flächen derselben „Art". Wir werden das in bekannter Weise so aussprechen, dass wir sagen:

<u>Die orthosymmetrischen Flächen derselben Art bilden ein zusammenhängendes Continuum.</u>

Offenbar gilt für die diasymmetrischen Flächen derselbe Satz. Um denselben zu beweisen, können wir uns freilich nicht auf frühere Arbeiten anderer Mathematiker berufen: denn die Doppelflächen z. B. sind in diesen früheren Arbeiten unberücksichtigt geblieben. Es gelingt aber den Beweis doch so zu führen, dass man die <u>Methode</u>

jener früheren Arbeiten mutatis mutandis beibehält. Vergl. die weiterhin noch oft zu nennende Leipziger Dissertation von Weichhold, 1883 [Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 28]. Vergl. andererseits die Arbeit von Dyck in Ann. 33, 1888.

6). Mit den symmetrischen Flächen werden [d. 18.6.92] auch die zugehörigen algebraischen Gebilde (deren Vorhandensein wir aus dem Riemann'schen Existenzsatze schließen) je ein Continuum bilden. Es wird sich weiterhin darum handeln, die Zahl der Dimensionen festzustellen, von denen das einzelne Continuum abhängt. Wir erinnern daran, daß wir früher (p. 113 der Winterautographie) die gleiche Aufgabe für die Gesammtheit der algebraischen Gebilde irgendwelchen p geleistet haben. Wir greifen hier auf das damalige Resultat zurück, indem wir das, was wir damals einen Modul nannten, jetzt als zwei reelle Parameter zählen (die damals bestimmten Moduln waren ja allgemein zu reden complexe Größen). Wir haben dann den Satz, daß die Gesammtheit der reellen Parameter, von welchen die Gebilde eines gegebenen p abhängen, $6p-6+2\varrho$ beträgt. Hier ist 2ϱ die Zahl der reellen Parameter, die in den eindeutigen Transformationen vorkommen, durch welche die Riemann'sche Fläche in sich selbst übergeht, d. h. $=6$ für $p=0$, $=2$ für $p=1$, und $=0$ für $p>1$. Aber nicht nur dies Resultat, sondern auch die Methode, mittelst deren dasselbe

damals abgeleitet wurde, wollen wir uns hier vergegenwärtigen. Wir zählten ab, wie vielfach unendlich die Zahl der m-blättrigen Flächen über der Ebene ist, in welche man eine vorgegebene Riemann'sche Fläche verwandeln kann (wobei wir m, um nicht in die Ausnahmefälle des Riemann-Roch'schen Satzes hineinzugeraten, $> 2p-2$ voraussetzen) und verglichen dann diese Zahl mit der Zahl der m-blättrigen Flächen desselben p, die es überhaupt giebt. Genau so werden wir hier bei den symmetrischen Flächen verfahren, nur dass wir jeden einzelnen Schritt unter Berücksichtigung der Symetrie einrichten. Wir wollen dabei, um Fallunterscheidungen zu vermeiden, m gleich als gerade Zahl voraussetzen. Wir suchen dann auf der gegebenen, symmetrischen Fläche eine Punktgruppe G_m so, dass ihre Punkte paarweise als symmetrische Punkte zusammengehören. Da können wir gerade $m/2$ Punkte beliebig annehmen, wobei jeder der Punkte, weil er sich frei auf der gegebenen Fläche bewegen kann, für zwei reelle Willkürlichkeiten zählt. Wir haben also ∞^m Möglichkeiten. Jetzt construiren wir uns die sämmtlichen reellen algebraischen Functionen z, welche in den Punkten der einzelnen solchen G_m unendlich werden.

Dieselben sind jedenfalls unter der Form enthalten:

$$z = c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \ldots\ldots\ldots c_m Z_m + c,$$

unter $Z_1, Z_2 \ldots\ldots$ Normalintegrale 2ter Gattung verstanden,

die in den einzelnen Punkten von G_m unendlich werden. Die $c_1 \dots\dots c_m$ werden dabei den Bedingungen zu unterwerfen sein:

$$
(\alpha)\quad
\begin{aligned}
c_1 \varphi_1(1) + \dots\dots\dots\dots\dots c_m \varphi_1(m) &= 0,\\
c_1 \varphi_2(1) + \dots\dots\dots\dots\dots c_m \varphi_2(m) &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\\
c_1 \varphi_p(1) + \dots\dots\dots\dots\dots c_m \varphi_p(m) &= 0,
\end{aligned}
$$

unter $\varphi_1, \varphi_2, \dots\dots \varphi_p$ die zugehörigen Formen erster Gattung verstanden. Hier werden wir nun die $\varphi_1, \dots\dots \varphi_p$ als reelle Ausdrücke voraussetzen dürfen, die $z_1, z_2, z_3, \dots\dots$ aber als paarweise konjugirt. Wir werden ferner die $c_1, c_2, c_3 \dots$ durch paarweise konjugirte Werte $a_1 + ib_1 \dots$ ersetzen, endlich die Bedingung einführen, daß c eine reelle Konstante sei. Da bei dem angenommenen Wert von m die p Gleichungen (α) jedenfalls linear unabhängig sind, so haben wir schließlich in dem Ausdrucke für z $(m-p+1)$ reelle willkürliche Parameter. Daher im Ganzen ∞^{2m-p+1} Möglichkeiten, unsere symmetrische Fläche in der beschriebenen Weise auf eine m-blättrige Fläche über der Ebene zu beziehen. Jetzt möge σ die Zahl der reellen Parameter sein, welche in den reellen eindeutigen Transformationen unserer Fläche in sich vorkommen: diese Zahl σ ist, wie man findet, für $p=0$ gleich 3, für $p=1$ gleich 1 und für größere p natürlich 0. So haben wir das Resultat, daß unsere vorgegebene Riemann'sche Fläche mit $\infty^{2m-p+1-\sigma}$ verschiedenen m-blättrigen Flächen der bei unserem Ansatz entstehenden Art gleichwertig ist. Aber

eine solche Fläche hat $2m-2+2p$ Verzweigungspunkte, welche entweder reell oder zu je zwei conjugirt sind, und die unter Aufrechterhaltung der hierin liegenden Beschränkung beliebig verschoben werden können, ohne daß dabei die Art der Fläche geändert würde. Das giebt $2m-2+2p$ reelle Parameter, also $\infty^{2m+2p-2}$ m-blättrige Flächen unserer Art. Indem wir durch die eben erhaltene Zahl dividiren, folgt endlich als *Zahl der innerhalb unserer Art zu unterscheidenden reellen algebraischen Gebilde ∞^{3p-3+6}.* Wir haben hier also für jede der $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$ Arten $3p-3+6$ *reelle Moduln*, d.h. genau die halbe Zahl von derjenigen, die bei der Gesammtheit der algebraischen Gebilde des Geschlechtes p auftrat.

Mit dieser Abzählung ist implicite die entsprechende Frage *für berandete Flächen beantwortet*, was darum ein gewisses Interesse hat, weil diese Frage von Riemann in seiner Dissertation aufgeworfen, aber nicht zu Ende discutirt wird. Riemann denkt natürlich nur an berandete *einfache* Flächen (nicht an Doppelflächen; denn deren Existenz wurde erst zehn Jahre später von Moebius bemerkt und wohl erst in meiner Schrift für functionentheoretische Zwecke herangezogen). Sei nun eine solche Fläche mit λ Randcurven gegeben, auf der man noch π nicht zerstückende Rückkehrschnitte ziehen kann. Sie betrachten wir als die Hälfte einer orthosymmetrischen Fläche vom Geschlechte $2\pi+\lambda-1$ mit λ Symmetrielinien

und wenden dementsprechend den Satz von den Moduln der symmetrischen Flächen an. Wir finden so: daß *$6\pi+3\lambda-6\sigma$ reelle Konstanten beiderseits gleich sein müssen, wenn zwei berandete Flächen (π, λ) eindeutig sollen aufeinander abbildbar sein, worauf dann die Abbildung sich auf ∞^6 Weisen ermöglicht*. Dieser Satz stimmt mit den näheren Angaben, welche Riemann in seiner Dissertation für den einfachen Fall: $\pi = 0$, $\lambda = 1$ der einfach berandeten, einfach zusammenhängenden Fläche macht: da ist $\sigma = 3$ und daher für die Abbildbarkeit zweier berandeter Flächen aufeinander gerade *keine* Bedingung zu erfüllen, zugleich ist die Abbildung allemal auf dreifach unendlich viele Weisen möglich.

Beiläufig bemerken wir, daß Riemann l. c. auch von der Frage der mehrdeutigen Abbildung zweier Flächen aufeinander spricht. Diese Frage ist bisher nur erst für den Fall untersucht, daß eine Fläche auf sich selbst abgebildet werden soll. In der Tat fällt sie da mit derjenigen zusammen, mit der sich die sog. *Korrespondenztheorie* beschäftigt. Wir haben über letztere auf p. 299/300 der Winterautographie und dann wieder zu Beginn des Sommersemesters ja bereits einige orientierende Bemerkungen gemacht.

[Di. 21.6.92.] Weiterhin werden von den hiermit entwickelten Sätzen insbesondere diejenigen zur Geltung kommen,

welche sich auf die Möglichkeit beziehen, irgend zwei symmetrische Flächen derselben Art, ohne aus der Art herauszutreten, continuirlich ineinander überzuführen.

Wir werden zum Beispiel eine Realitätsuntersuchung nur für einen einzelnen Repräsentanten jeder Flächenart machen und das Resultat von da aus auf alle symmetrischen Flächen derselben Art ausdehnen. Als solche Repräsentanten werden uns häufig die hyperelliptischen Flächen dienlich sein („hyperelliptische Methode"). Leider geben uns diese ja, was orthosymmetrische Flächen angeht, Beispiele nur für den niedersten und den höchsten Fall; die hyperelliptische Methode ist also, sobald $p > 3$ wird, wesentlich unvollständig.

Andererseits erinnere man sich, daß der niederste diasymmetrische und der niederste orthosymmetrische Fall bei demselben hyperelliptischen Gebilde (dem Gebilde mit nur imaginären Verzweigungspunkten) auftreten [wobei das eine Mal die Operation Σ_1, das andere Mal die Operation Σ_2 zu Grunde gelegt wird]; hierin ist begründet, daß die genannten beiden Fälle bei unseren späteren Betrachtungen vielfach cooordinirt erscheinen. Eine andere Art, einen Repräsentanten innerhalb der einzelnen Flächenart auszusuchen und von ihm aus die weiteren Schlüsse zu machen,

bezeichne ich als *Doppelpunktmethode*. Wir haben schon oft davon Gebrauch gemacht, daß aus einer mehrblättrigen Fläche beim Zusammenrücken zweier geeigneter Verzweigungspunkte eine Fläche vom Geschlechte $(p-1)$ entsteht, bei der die bez. Verzweigungspunkte sich compensieren, d. h. wegfallen. Es bleiben dann in den beiden Blättern, die vorher durch die Verzweigungspunkte verbunden waren, nur zwei „Narben" zurück. Geometrisch bedeutet dies, daß die ebene Curve, die wir der mehrblättrigen Fläche coordiniren mögen, einen *Doppelpunkt* bekommt; die beiden Curvenpunkte, die im Doppelpunkte vereinigt sind, sind es, denen die beiden „Narben" der ausgearteten, mehrblättrigen Fläche entsprechen. Möge man nun eine symmetrische Fläche in der Weise dargestellt haben, daß man über eine „tragende" Fläche mit λ Randcurven beiderseitig eine Membran ausbreitet und deren übereinanderliegende Partieen längs der λ Randcurven aneinander heftet. Dann wird man den in Rede stehenden Uebergang zu einer Fläche vom Geschlechte $(p-1)$ insbesondere in der Weise vollziehen können, daß man eine beliebige der λ Oeffnungen der tragenden Fläche auf einen Punkt zusammenzieht und damit zum Verschwinden bringt. Für die zugehörige reelle ebene Curve heißt das, daß einer der zugehörigen reellen Züge, ohne daß

die Curve aufhörte, reell zu sein, sich in einen isolirten Doppelpunkt verwandelt. Und eben diese Curve vom Geschlechte $(p-1)$ mit dem isolirten Doppelpunkte werden wir dann bei Gelegenheit als Repräsentanten der allgemeinen Curven vom Geschlechte p betrachten. Die besondere Tragweite der Riemann'schen Methoden aber werden wir gerade in der Leichtigkeit erblicken, mit welcher vermöge derselben derartige Particularisirungen vorgenommen werden können. In der Tat beherrscht man die reellen Curvengestalten von der algebraischen Gleichung aus noch in keiner Weise so vollständig, daß man, bei höherem p, über die Möglichkeit entscheiden könnte, den einen oder anderen Curvenzug zu einem isolirten Doppelpunkte zusammenzuziehen.

C. Beziehungen der Theorie der symmetrischen Flächen zur Curvenlehre.

Daß jede reelle Curve eines beliebig ausgedehnten Raumes, sagen wir jede C_m eines R_q, eine symmetrische Riemann'sche Fläche definirt, braucht hier kaum wiederholt zu werden. Dagegen fügen wir hinzu, daß sie uns vermöge der Schnitte, die sie mit den „Ebenen" des R_q gemein hat, auf der symmetrischen Fläche eine

„reelle" G_m^q liefert. Diese enthält entsprechend den Schnitten der C_m mit den <u>reellen</u> Ebenen, ∞fach unendlich viele <u>reelle</u> G_m, d. h. solche Punktgruppen G_m, deren m Punkte entweder einzeln sich oder zu je zweien einander symmetrisch sind. Umgekehrt werden wir, sobald eine symmetrische Fläche gegeben vorliegt, auf diese in mannigfaltiger Weise <u>reelle</u> G_m^q construiren können, wie wir sogleich noch ausführen, und haben dann jeder solcher G_m^q entsprechend notwendig eine reelle C_m des R_q. Dass reelle Curvenzüge und Symmetrielinien der Fläche sich dabei entsprechen, braucht kaum noch hervorgehoben zu werden.

So haben wir denn, dass die C_m des R_q bei gegebenem p allgemein zu reden in ebensoviele Arten zerfallen, als es symmetrische Flächen des Geschlechtes p giebt.

Wir unterscheiden dementsprechend

<u>(p+1) Arten von diasymmetrischen Curven, bez. mit 0, 1, ... p reellen Zügen,</u>

<u>$\left[\frac{p+2}{2}\right]$ Arten orthosymmetrischer Curven mit p+1, p−1, p−3, reellen Zügen.</u>

Wie wir dabei die Worte „diasymmetrisch" und „orthosymmetrisch" am einfachsten durch reelle Constructionen an der reellen Curve erklären, wird später zu erläutern sein. Die einzige allgemeine Einschränkung, die wir unmittelbar vor Augen sehen, ist die, dass im

diasymmetrischen Falle mit $\lambda = 0$ selbstverständlich die Ordnung m der Curve eine gerade sein muss. Im Uebrigen erinnern wir uns an den *Harnack'schen* Satz aus Annalen X, 1876, demzufolge für jedes p ebene Curven mit $p+1$ reellen Zügen existiren sollten, die Zahl $p+1$ aber von den reellen Zügen auch nicht überschritten werden konnte.

Dieser Satz erscheint hier als blosses Corollar unserer allgemeinen Einteilung der reellen Curven eines beliebig ausgedehnten Raumes in $\left[\frac{3p-4}{2}\right]$ Arten.

[Do. 23.6.92.] Uebrigens werden hier nun, betreffs der *reellen* G_m^q auf einer symmetrischen Fläche, alle die Untersuchungen von *Vollschaaren* und *Teilschaaren*, von *allgemeinen Schaaren* und *Specialschaaren* wiederkehren, die wir im Wintersemester einführten. Wir reden hier nur von den „Vollschaaren allgemeinen Charakters" G_m^{m-p} und den ihnen entsprechenden „Normalcurven", ferner von der „umfassendsten Specialschaar", die es giebt, der G_{2p-2}^{p-1} und der zugehörigen „Normalcurve der φ". Hinterher werden wir fragen können (was wir aber nicht mehr ausführen), welche Curven in niederen Räumen aus den genannten durch reelle Projection entstehen mögen. Da würde dann eine Discussion der Realitätsverhältnisse des Specialgruppenproblems in Betracht

kommen!

Bei der Discussion der *allgemeinen Normalcurven* C_m des R_{m-p} gehen wir darauf aus, die m Punkte, in welchen die Curve das Unendlichweite des R_{m-p} schneiden soll, auf der symmetrischen Fläche in geeigneter Weise anzunehmen. Wir construiren dann die zugehörigen Functionen

$$c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \dots\dots\dots c_m Z_m + C,$$

suchen unter ihnen $m-p$ linear unabhängige reelle algebraische Functionen aus und setzen diese gleich den $m-p$ (nicht homogenen) Coordinaten des R_{m-p}.

Sei hier m erstlich eine gerade Zahl. Wir können dann die m Punkte (wie wir dies schon oben bei der Abzählung der reellen Moduln der symmetrischen Flächen taten) paarweise einander symmetrisch wählen und erhalten dann im R_{m-p} eine reelle Curve, welche genau so viele (λ) reelle Züge besitzt, als die Fläche Symmetrielinien aufweist, *das Unendliche aber nicht reell schneidet.* Die Curve ist also nach ihrem reellen Verlauf ganz im Endlichen gelegen (wobei man ja wohl den Fall $\lambda = 0$ noch besonders hervorheben wird, wo eine derartige Behauptung nur uneigentliche Bedeutung hat, da dort überhaupt kein reeller Curvenpunkt vorhanden ist). Man specificire dies Resultat

für die niedersten Werte von p (wobei noch in Betracht kommen wird, daß es für $p = 0, 1$ überhaupt keine anderen Vollcurven als die hier gemeinten giebt) und mache sich etwa noch deutlich, daß bei reeller Parallelprojection der genannten Curven auf niedere Räume immer wieder Curven derselben Ordnung entstehen müssen, welche sich, ihrem reellen Verlaufe nach, nicht in's Unendliche ziehen.

Sei ferner m beliebig, aber $\lambda > 0$. Wir wählen $p \leqq \frac{m}{2}$ und verlegen $(m - 2k)$ der Unendlichkeitspunkte irgendwie auf die Geometrielinien und nehmen nur die übrigen $2 \cdot k$ Punkte paarweise symmetrisch. Wir bekommen so eine C_m des R_{m-p}, welche sich mit irgend $(m - 2k)$ ihrer Punkte durch's Unendliche zieht.

Und das Charakteristische dabei ist, daß diese ganz beliebig auf die λ Symmetrielinien, d.h. die reellen Züge der Curve verteilt sein können, auch auf demselben Zuge nach Belieben zusammenfallen dürfen. Durchsetzt einer der Züge das Unendlichweite in einer unpaaren Zahl von Punkten, so ist es überhaupt unpaar etc.

Da haben wir für $p = 0$ und $m = 2$ die gewöhnliche Einteilung der reellen Kegelschnitte in Ellipse, Parabel, Hyperbel, für $p = 0$ und $m = 3$ die entsprechende Einteilung der Raumcurven dritter Ordnung etc. etc.

Leider tragen die so formulirten elementaren Sätze ja nicht weit, weil die meisten Curven, die uns interessiren, Specialcurven sind. So wird man beispielsweise die Hilbert'schen Realitätssätze über Raumcurven vom Maximalgeschlecht, über die wir oben referirten (p 64), hier nicht einordnen können. Um so lieber wenden wir uns jetzt zur

Normalcurve der φ.

Wir definiren dieselbe hier, wie auch sonst, durch den Ansatz

$$\varphi_1 : \varphi_2 \cdots\cdots \varphi_p = dw_1 : dw_2 : \cdots dw_p ,$$

wobei wir nur den Zusatz machen, daß wir die dw jetzt als reelle Differentiale gewählt denken, was augenscheinlich immer möglich ist. Das allgemeinste reelle Differential (erster Gattung) wird dann durch $\Sigma c_i dw_i$ gegeben, unter den c_k reelle Constanten verstanden. Unsere „reelle" Curve wird also bis auf „reelle" Collineationen, denen man dieselbe unterwerfen mag, bestimmt sein. Und wir werden genau so viele Arten reeller Curven unterscheiden, als es Arten symmetrischer Flächen giebt, also $(p+1)$ diasymmetrische Arten, mit $p, p-1, \ldots 1, 0$ reellen Zügen, und $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ orthosymmetrische Arten, mit $p+1, p-1, \ldots$ reellen Zügen.

Ich sage nun vor allen Dingen: <u>die reellen Züge der vorgenannten Curven sind sämmtlich paar.</u>

Zum Beweise habe ich zu zeigen, daß jeder dieser Züge von einer beliebigen reellen „Ebene" $\sum c_K \varphi_K = 0$ in einer paaren Anzahl von Punkten getroffen wird, d. h. daß ein reelles Differential $\sum c_K \, dw_K$ entlang einer Symmetrielinie der Riemann'schen Fläche notwendig immer in einer paaren Anzahl von Punkten verschwindet.

Man beachte zu dem Zwecke, daß die genannten Verschwindungspunkte „Kreuzungspunkte" derjenigen überall endlichen Strömung auf unserer Fläche sind, welche zu dem reellen Teile des Integrals 1ter Gattung $\sum c_K w_K$ in dem zu Anfang dieser Vorlesung erläuterten Sinne zugehört. Aber für diese Strömung sind die einzelnen Symmetrielinien der Fläche Strömungscurven. Trägt daher eine solche Symmetrielinie einen Kreuzungspunkt der Strömung, so trägt sie auch noch einen zweiten, trägt sie drei, so gleich vier. Denn in den bez. Kreuzungspunkten wird der Sinn der entlang der Symmetrielinie stattfindenden Strömung umkehren. Quellpunkte aber und dergl. Unstetigkeiten, welche anderenfalls die Bündigkeit unseres Schlusses beeinträchtigen könnten, sind bei der überall endlichen Strömung nicht vorhanden. Daher etc.

[Fr. 24.6.92] Wir handelen ferner davon, wie sich hier die hyperelliptischen Fälle darstellen. Bei ihnen artet die

Curve der φ, wie wir aus der allgemeinen Theorie wissen, in eine doppelt überdeckte rationale C_{p-1} (der R_{p-1}) aus. Nun kann eine solche Curve, wenn sie reell sein soll, bei ungeraden p sowohl nullteilig als einteilig sein. Ich sage aber, dass sie notwendig <u>einteilig</u> sein muss, wenn sie ein reelles hyperelliptisches Gebilde tragen soll. Das ist gewiss so, wenn wir von den auf pag 140 ff. betrachteten Fällen ausgehen, bei denen wir die Verzweigungspunkte der hyperelliptischen Fläche über der z-Ebene entweder reell oder paarweise conjugirt imaginär genommen haben.

Wir können sagen, dass wir besagte Verzweigungspunkte damit auf der z <u>Kugel orthosymmetrisch</u> angeordnet haben. Aber man wird fragen, ob man nicht auch ein reelles hyperelliptisches Gebilde bei diasymmetrischer Anordnung der Verzweigungspunkte vor sich hat, also wenn man die beiden über die Kugel <u>ausgebreiteten</u> Blätter geradezu etwa durch solche $2p+2$ Verzweigungspunkte verbindet, welche paarweise im elementaren Sinne diametral sind. Sicher kann ich doch einen Punkt einer solchen zweiblättrigen Fläche mit einem beliebigen der beiden Punkte zusammenordnen, die ihm diametral gegenüber in dem einen oder anderen Blatte der Fläche liegen, und so zwei Transformationen Σ_1 und Σ_2 der Fläche in sich finden, die zweifellos conform

sind, und die Winkel umlegen!

Aber wenn man die Sache näher verfolgt, so sieht man, daß Σ_1 und Σ_2 nicht etwa, wie es beim reellen hyperelliptischen Gebilde sein soll, zwei unterschiedene eindeutige Transformationen der Fläche in sich vorstellen, sondern zwei Zweige (sozusagen) einer zweideutigen Transformation! Und eben deßhalb kommt dieses hyperelliptische Gebilde hier, wo wir allein die reellen Gebilde im elementaren Sinne des Wortes aufzählen, nicht in Betracht.

Auf der einteiligen rationalen C_{p-1} werden wir dann jenachdem $2p+2, 2p, 2p-2 \ldots\ldots 2, 0$ reelle Verzweigungspunkte anzubringen haben. Ist diese Zahl >0, so zerfällt dadurch der reelle Zug der C_{p-1} in eine entsprechende gerade Zahl, sagen wir 2λ, von Teilen.

Da können wir die C_{p-1} nun entweder so als Gränze einer reellen C_{2p-2} auffassen, daß wir den ersten, dritten, ... $(2\lambda-1)^{\text{ten}}$ Teil doppelt überdeckt denken und den zweiten, vierten, ... $(2\lambda)^{\text{ten}}$ Teil ausfallen lassen, oder so, daß wir es gerade umgekehrt machen. Die hyperelliptische Curve erscheint also (für $\lambda>0$) als Uebergangsfall zwischen zwei nicht hyperelliptischen C_{2p-2}, welche beide λ reelle Ovale besitzen (und die natürlich für $\lambda=1, 2 \ldots p$ diasymmetrisch und nur für $\lambda=p+1$ orthosymmetrisch sind). Anders ist es, falls sämt-

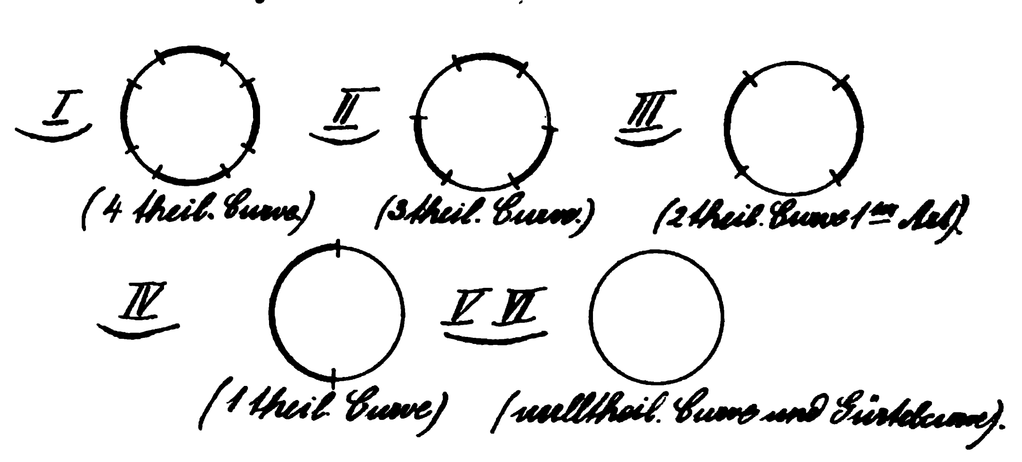
liche Verzweigungspunkte imaginär sind. Um zur benachbarten C_{2p-2} zu gelangen, werden wir da entweder die ganze C_{p-1} verschwinden lassen, das giebt uns eine nullteilige C_{2p-2}, oder sie nach ihrer ganzen Erstreckung doppelt überdecken, was einen oder zwei getrennte Curvenzüge der C_{2p-2} liefert, je nachdem p gerade oder ungerade ist. Die hyperelliptische Curve mit $\lambda = 0$ erscheint so als Uebergangsfall zwischen der niedersten diasymmetrischen und der niedersten orthosymmetrischen Art von C_{2p-2}.

Alles das sind natürlich nur Transcriptionen derjenigen Sätze, welche wir früher für die symmetrischen hyperelliptischen Flächen aufgestellt haben.

Wir betrachten jetzt die reellen Normalcurven der φ der allgemeinen Fälle $p = 3, 4$ etwas genauer.

Bei $p = 3$ wird es sich darum handeln, die Kenntnisse, welche man von der Gestalt der ebenen Curven 4ter Ordnung hat (Winterautographie p 247 ff.) mit der hier entwickelten Theorie der symmetrischen Flächen in Verbindung zu setzen, bei $p = 4$ dagegen darum, von letzterer Theorie aus überhaupt erst Einsicht in die verschiedenen möglichen Gestalten derjenigen reellen Raumcurven 6ter Ordnung zu gewinnen, welche der volle Schnitt einer Fläche zweiter und einer Fläche dritter Ordnung sind.

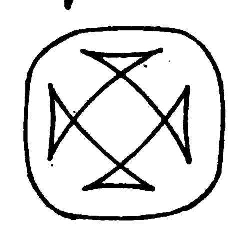
Der Vergleich bei $p = 3$ ist rasch gemacht. Wir haben da $\left[\frac{3p+4}{2}\right] = 6$ Arten symmetrischer Flächen, je eine mit 4, 3, 1, 0 Symmetrielinien und zwei mit 2 Symmetrielinien, und in der Tat lernten wir l.c. 6 Arten von ebenen Curven vierter Ordnung kennen, je eine mit 4, 3, 1, 0 Ovalen, und zwei mit 2 Ovalen: die zweiteilige Curve erster Art und die Gürtelcurve. Da bliebe aber nur noch zu entscheiden, welche von diesen beiden Curven diasymmetrisch, welche orthosymmetrisch ist? Wir beantworten das mit, wenn wir zunächst, wie dies unserer allgemeinen Theorie nach möglich sein muss, die auf p. 247 der Winterautographie gezeichneten Curven sämmtlich auf reellem Wege in hyperelliptische Gränzfälle übergehen lassen. Wir erhalten da folgende Figuren, die ohne weitere Erklärung verständlich sein werden:



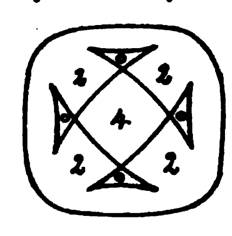
(4 theil. Curve) (3 theil. Curve) (2 theil. Curve 1ter Art)

(1 theil. Curve) (nulltheil. Curve und Gürtelcurve).

Man sieht: die Gürtelcurve gehört mit der nullteiligen Curve, d.h. dem niedrigsten diasymmetrischen Falle zusammen und repräsentirt eben darum unserer allgemeinen Theorie zufolge, den niedrigsten ortho-symmetrischen Fall. Immerhin ist interessant, dies direct durch Construction der zugehörigen Riemann'schen Fläche zu bestätigen. Wir ersetzen zu dem Zwecke die Gürtelcurve durch die ihr dualistisch entgegentretende Curve vierter Classe



und construiren nun bei ihr die hier besonders übersichtliche „projective" Riemann'sche Fläche (W. d. p. 254 ff). Dieselbe überdeckt die Ebene so mit ihren Blättern, wie durch die Ziffern der folgenden Figur angedeutet ist:



und ist hiernach sehr leicht vorzustellen (das Nähere siehe

in meinem Aufsatze in Math. Ann. 10, 1876). Und wenn man diese Fläche nun längs der reellen Curvenzüge aufschneidet, so zerfällt sie in der Tat in zwei Hälften, d.h. sie ist orthosymmetrisch, w. z. b. w.

[Ab. 27.6.92.] Sehen wir nun, was wir über die Normalcurve bei $p=4$, die C_6 der R_3 (die der volle Durchschnitt einer F_2 mit einer F_3 ist) in Erfahrung bringen können. Von geometrischer Seite haben wir da zunächst die Hülfsmittel, die uns die Modelle der Flächen zweiter und dritter Ordnung an die Hand geben: es wird mit Hülfe dieser Modelle nicht schwer sein, für alle die in Betracht kommenden Curventypen Beispiele zu finden, während allerdings der Beweis, daß es nur eine bestimmte Reihe Curventypen giebt, auf diesem Wege nur schwer zu führen sein dürfte. Wir haben ferner die Möglichkeit, die C_6 in der ebenen Abbildung der F_2 zu construiren. Ist die F_2 nullteilig, so ist es auch die C_6, diesen Fall mögen wir ohne Weiteres als erledigt ansehen. Die übrigen reellen F_2 gestatten je reelle Abbildungen auf die Ebene, wobei die auftretenden 3 Fundamentalpunkte reell oder imaginär sein werden, je nachdem die reelle F_2 geradlinig oder nicht geradlinig ist. Nun wird es darauf ankommen in der Bildebene alle C_6 zu zeichnen, welche die beiden Fundamentalpunkte zu dreifachen Punkten haben.

Jetzt knüpfen wir an die Theorie der symmetrischen Flächen! Wir erfahren da sofort, daß es acht Arten unserer C_6 giebt, nämlich

<u>fünf „diasymmetrische" Arten bez. mit 0, 1, 2, 3, 4 reellen Zügen</u>

<u>drei „orthosymmetrische" Arten mit 1, 3, 5 reellen Zügen.</u>

Lassen wir da den mittelsten orthosymmetrischen Fall bei Seite, so müssen die übrigen 7 Arten sich alle aus den entsprechenden <u>hyperelliptischen V</u>orkommnissen ableiten lassen.

Nehmen wir etwa zunächst die hyperelliptischen Fälle $p=4$ mit 2, 4, 6, 8, 10 reellen Verzweigungspunkten. Die Normalcurve der φ ist da eine doppeltzählende Curve 3ter Ordnung, deren beide Ueberdeckungen in 2, 4, 6, 8, 10 reellen Punkten zusammenhängen. Die Curve erscheint durch diese Punkte in 2, 4, 6, 8, 10 Segmente zerlegt. Wir vertheilen diese Segmente auf 2 Serien in der Art, daß wir aneinanderstoßende Segmente verschiedenen Serien zuweisen. Da werden wir dann nach Belieben die Segmente der einen Serie in schmale Ovale übergehen und die Segmente der anderen Serie verschwinden lassen oder umgekehrt. Jedesmal erhalten wir die schematische Figur einer möglichen C_6. Diese C_6 enthält jenachdem

1, 2, 3, 4, 5 Ovale und ist natürlich (von dem letzten Falle der 5 Ovale abgesehen) diasymmetrisch. Vergl. die nebenstehende Figur, die den Fall der 5 Ovale erläutert.

Wir betrachten ferner den hyperelliptischen Fall ohne reelle Verzweigungspunkte. Die Normalcurve ist da eine Raum-C_3, welche schlechtweg doppelt überdeckt ist.

Von da kommen wir dann einerseits zur nullteiligen C_6 (also dem niedrigsten diasymmetrischen Fall), indem wir die C_3 einfach verschwinden lassen, andererseits aber zu derjenigen einteiligen C_6, welche den niedersten orthosymmetrischen Fall vorstellt, indem wir die C_3 nach ihrer ganzen Erstreckung in zwei nebeneinander herlaufende Curvenzüge (die schliesslich, zusammengenommen, nur einen einzigen Curvenzug ausmachen), spalten.

Es scheint mir richtig, <u>daß wir uns diese letztere C_6 noch besonders als den Schnitt einer F_2 mit einer F_3 klarmachen.</u>

Im hyperelliptischen Falle ist die F_2 (welche eine F_3 nach Erstreckung der räumlichen C_3 berühren muß) notwendig ein Kegel (und zwar, weil es sich um eine reelle

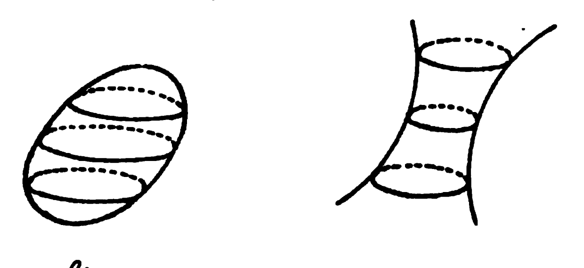
C_3 handelt, ein reeller, einteiliger Kegel). Denn sonst würde der Schnitt von F_2 und F_3, wie wir schon früher hervorhoben (p. 117) unmöglich in eine doppeltzählende C_3 ausarten können. Dieser Kegel ist irgendeiner von denen, die von den durch einen festen Punkt der C_3 hindurchgehenden Secanten der C_3 gebildet werden; die C_3 läuft also durch die Kegelspitze.

Daher erhält man, wenn man den Kegel in üblicher Weise stereographisch auf die Ebene überträgt, die nebenstehende Figur; in ihr sind die beiden unendlich nahe aneinander gerückten Fundamentalpunkte, welche bei der Abbildung des Kegels entstehen, markirt und der grösseren Deutlichkeit halber auch noch die Verbindungsgerade derselben besonders gezeichnet. Geht jetzt unsere C_3 in die einteilige (orthosymmetrische) C_6 über, so ist notwendig, dass sich der Kegel in ein einschaliges Hyperboloid verwandelt, denn ein zweischaliges Hyperboloid würde den an der ganzen C_3 entlang laufenden Curvenzug unmöglich enthalten können.

In der Abbildung rücken also jetzt die beiden Fundamentalpunkte in zwei reelle Punkte auseinander.

Gleichzeitig verwandelt sich unsere C_3 durch Spaltung entlang ihrer ganzen Erstreckung in eine C_6, welche durch jeden dieser Fundamentalpunkte einmal hindurchgeht. Wir kommen so zu der nebenstehenden Figur, die nun noch rückwärts auf das einschalige Hyperboloid im Raume übertragen werden sollte.

Endlich haben wir noch *die orthosymmetrischen Curven mit 3 Zügen* zu construieren. Da haben wir zunächst nur die negative Vorschrift, daß es sich um eine Curve handeln soll, welche sich auf reellem Wege *nicht* in eine hyperelliptische C_3 überführen läßt. Es wird darauf ankommen, durch besonderen Ansatz eine dreiteilige C_6 zu construieren, welche dieser negativen Vorschrift genügt. Und das gelingt sofort, wenn wir z. B. ein Ellipsoid oder auch irgend ein Hyperboloid mit dem Aggregate dreier Parallelebenen $p\,q\,r = 0$ zusammenstellen, wie es durch folgende Figur erläutert wird:



und nun an Stelle von $pqr = 0$ vielleicht $pqr - \varepsilon$ setzen, unter ε eine kleine Grösse verstanden, also das Tripel der der Ebene durch eine in der Nähe verlaufende eigentliche Fläche dritter Ordnung ersetzen. Unsere Curve besteht, wie man sieht, aus drei sich wechselseitig einschliessenden Ovalen, ich werde sie, in Ermangelung eines anderen Namens, kurz als Trippelcurve bezeichnen.

Wir haben so über die Gestalten der verschieden- [Di. 28.6.92.] artigen C_6 wenigstens eine erste Uebersicht.

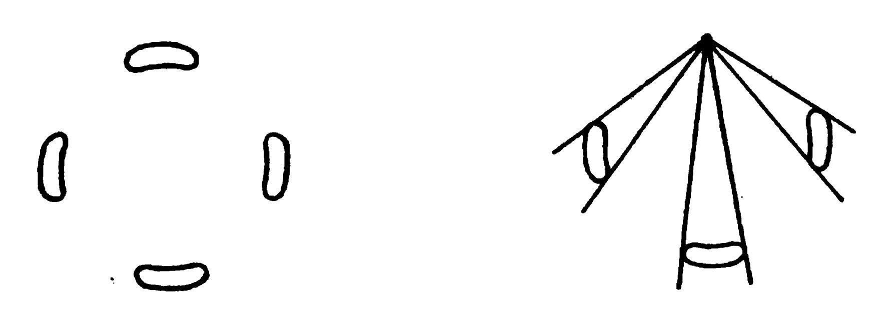
Wollen wir die erhaltenen Resultate, wie auch die auf die ebenen C_4 bezüglichen, jetzt noch insoweit einer Controlle unterwerfen, als wir die „Doppelpunktmethode" heranziehen. Man überlege sich zunächst, dass die C_{2p-2} des R_{p-1}, wenn sie einen Doppelpunkt erhält (womit ihr Geschlecht um 1 sinkt); von diesem Doppelpunkte auf den R_{p-2} projicirt in diesem eine C_{2p-4} ergeben wird, die die Normalcurve der φ für das Geschlecht $(p-1)$ vorstellt.

Nun können wir bei einer reellen, nicht nullteiligen C_{2p-2} einen Doppelpunkt dadurch herstellen (wie wir

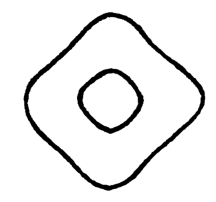
früher schon aus der Theorie der symmetrischen Flächen schlossen), dass wir irgend einen ihrer reellen Züge zu einem Punkte zusammenziehen.

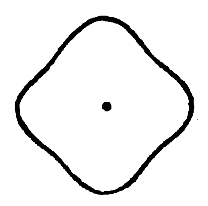
Die entstehende symmetrische Fläche vom Geschlechte $(p-1)$ wird $(\lambda-1)$ reelle Züge besitzen und orthosymmetrisch oder diasymmetrisch sein, jenachdem es die ursprüngliche Fläche war. Wir müssen da nun den orthosymmetrischen Fall mit $\lambda = 1$ ausnehmen, bei welchem bei Zusammenziehen der Symmetrielinie ein Zerfallen der Riemann'schen Fläche eintritt, worauf sich Verhältnisse einstellen, die einer besonderen Discussion bedürfen. Indem wir dies Alles zusammenfassen, werden wir folgendermassen sagen: Ausgenommen den orthosymmetrischen Fall $\lambda = 1$ (der natürlich nur bei geraden p möglich ist) kann bei jeder unserer Normalcurven (p, λ) jeder einzelne Curvenzug zu einem isolirten Doppelpunkte reell zusammengezogen werden und die Projection der Curve von diesem Punkte aus auf den R_{p-2} giebt dort diejenige Normalcurve $(p-1, \lambda-1)$, welche mit der ursprünglichen Curve gleichen Character besitzt (d.h. orthosymmetrisch oder diasymmetrisch ist, jenachdem es die ursprüngliche Curve war). Diesen Satz mögen wir nun an ein paar Beispielen $p = 3, 4$ prüfen.

Man beginne etwa mit der vierteiligen ebenen C_4, bei der wir das obere Oval in einen Punkt zusammenziehen, wie nachstehende Figur erläutert:

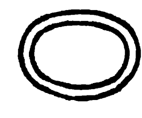


Die Bestätigung unseres Satzes liegt hier darin, dass von dem isolirten Doppelpunkte aus sechs reelle Tangenten an die Curve möglich sind (sodass bei der Projection auf eine doppeltzählende Gerade wirklich sechs reelle Verzweigungspunkte hervorkommen). Wir betrachteten ferner die Gürtelcurve vierter Ordnung. Indem wir das innere Oval zum isolirten Punkte zusammenziehen, erhalten wir eine einteilige Curve $p=2$, bei welcher vom Doppelpunkte aus keine reelle Tangente an die Curve geht:

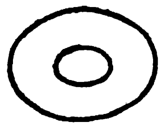


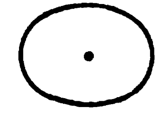


Auch dieses stimmt. Aber wie ist es möglich, bei der Gürtelcurve das äußere Oval zum isolirten Punkte zusammenzuziehen? Ganz einfach so, daß man dasselbe zuerst mit dem engeren Ovale zusammenfallen läßt, (was der zugehörige hyperelliptische Fall $p = 3$ ist):



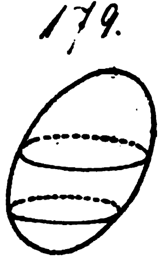
und es dann noch mehr einschrumpfen läßt (worauf dasselbe jetzt seinerseits das eingeschlossene Oval vorstellt):



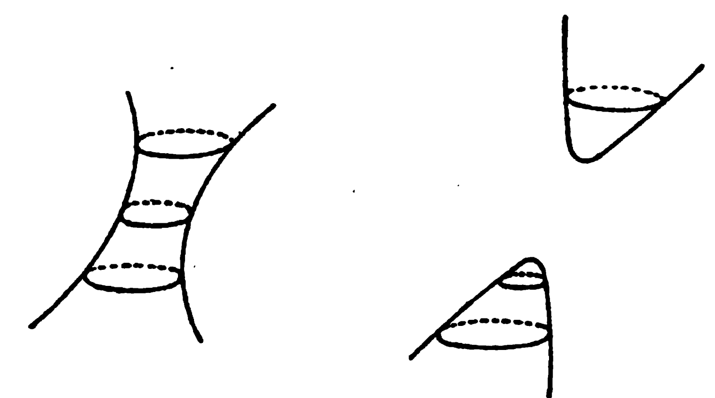


Man nehme ferner als Beispiel der Normalcurve sechster Ordnung $p = 4$ die Tripelcurve, die auf einem Ellipsoide liegt:

Da hat es keine Schwierigkeit, das obere Oval, bei festgehaltenem Ellipsoid, auf einen Punkt zusammenzuziehen:



Und projiciren wir nun die Curve von diesem Punkte aus auf eine Ebene, so entsteht dort als Curve vierter Ordnung richtig eine Gürtelcurve, d. h. eine orthosymmetrische Curve mit je zwei Zügen. Wollen wir aber bei der Tripelcurve unserer Figur das mittlere Oval zu einem Punkte zusammenziehen, so würden wir unser Ellipsoid zuerst in ein einschaliges dann in ein zweischaliges Hyperboloid übergehen lassen, wie nächstehende Figur erläutert:



Da hat es dann ersichtlich keine Schwierigkeit gerade das mittlere Oval in einen Punkt zusammenzuziehen.

Wir wenden uns jetzt, betreffs unserer reellen Normalcurven der φ, zur Discussion eines besonderen Realitätsproblems. Es soll sich darum handeln, diejenigen Ebenen des R_{p-1} aufzusuchen:

$$\Sigma c_k \varphi_k = 0,$$

— wir nennen dieselben kurz Φ, welche unsere C_{2p-2} in $(p-1)$ Punkten je einfach berühren. Der Constantenzählung nach wird es bei beliebigem p eine endliche Zahl solcher Φ geben. Das sind bei $p=3$ Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung, bei $p=4$ die dreifachen Tangentenebenen der C_6, bei $p=2$ (um diesen Fall doch nicht auszulassen) die Verzweigungspunkte der doppelt überdeckten Geraden.

Wir müssen vor allen Dingen berichten, welche hervorragende Bedeutung das Problem der Φ in der Theorie der Abel'schen Functionen besitzt. Es seien $v_1, v_2, \ldots v_p$ die Normalintegrale 1ter Gattung, welche zu der irgendwie „kanonisch" zerschnittenen Riemann'schen Fläche gehören, und wir schreiben insbesondere, indem wir zwei Punkte x und y der Fläche als obere und untere Gränze einführen:

$$v_1 = \int_y^x dv_1, \quad v_2 = \int_y^x dv_2, \ldots\ldots\ldots\ldots v_p = \int_y^x dv_p$$

Die so bestimmten $v_1, v_2 \ldots\ldots v_p$ wollen wir dann in die zugehörigen 2^{2p} Thetafunctionen einsetzen:

$$\vartheta_{\substack{g_1\, g_2 \ldots\ldots g_p \\ h_1\, h_2 \ldots\ldots h_p}}(v_1, v_2, \ldots\ldots v_p),$$

die durch die bekannten Reihenentwickelungen definirt sein mögen (die wir hier nicht weiter explicite angeben); die $g_1 \ldots\ldots g_p, h_1 \ldots\ldots h_p$ sind dabei $2p$ Indices, deren jeder die Werte 0 oder 1 annehmen kann. Wir nennen eine solche ϑ-Function gerade oder ungerade, je nachdem

$$g_1 h_1 + g_2 h_2 + \ldots\ldots g_p h_p \begin{Bmatrix} \equiv 0 \\ \equiv 1 \end{Bmatrix} (\mathrm{mod.}\, 2).$$

Und nun wird man fragen, wie die hiermit eingeführten 2^{2p} Functionen der beiden Flächenpunkte x, y sich an der Curve der y darstellen mögen? Was die geraden ϑ angeht [deren Anzahl $= 2^{p-1}[2^p+1]$ ist], so müssen wir auch jede Andeutung über die da zugehende Antwort bis auf Weiteres verschieben. Was aber die ungeraden ϑ betrifft, deren Anzahl $= 2^{p-1}[2^p-1]$ wird, so steht die Frage bei ihnen in engster Beziehung zu unserem Problem der Φ. Einem jeden ungeraden ϑ erscheint nämlich bei gegebener Zerschneidung der Riemann'schen Fläche ein bestimmtes Φ eindeutig zugeordnet, und man hat dann, unter $\Phi(x)$, $\Phi(y)$ die Werte verstanden,

welche Φ an den Stellen x, y annimmt, die einfache Formel

$$\vartheta_{\substack{g_1 \ldots\ldots g_p \\ h_1 \ldots\ldots h_p}}(v_1 \ldots v_p) = \sqrt{\Phi(x)} \cdot \sqrt{\Phi(y)} \cdot \Omega(x, y);$$

$\Omega(x, y)$ soll dabei die Primform unseres algebraischen Gebildes bezeichnen. Das Problem der Φ und die Discussion der bei ihm auftretenden Realitätsverhältnisse hat hiernach die unmittelbarste Beziehung zur Lehre von den Abel'schen Functionen. (Man bezeichnet geradezu wohl die $\sqrt{\Phi.(x)}$ als Abel'sche Functionen im engeren Sinne). Wir haben das hier vorausgeschickt um das Interesse zu kennzeichnen, welches die nähere Untersuchung der Φ besitzt; später werden wir umgekehrt die Lehre von den Abel'schen Functionen, bez. den ϑ-Functionen benutzen, um die Theorie der Φ zu Ende zu führen.

[Di. 30.6.92] Die Anzahl der ungeraden ϑ ist, wie wir beiläufig bemerkten

$$2^{p-1}(2^p-1).$$

Ebenso groß ist also (wenn wir einstweilen von allen Ausnahmefällen absehen, die wir später discutiren) die Zahl der Φ, also für $p = 2, 3, 4$ bezw. 6, 28, 120, wie uns von anderer Seite wohlbekannt ist. Wir wollen zusehen, welche elementaren Mittel uns zur Verfügung stehen, um für $p = 3, 4$ diese Zahlen

zu gewinnen, bez. bei grösserem p die Zahl zu finden.

Wir erläutern dies um so lieber, als wir die gleichen Ansätze hernach bei der Realitätsdiscussion gebrauchen werden.

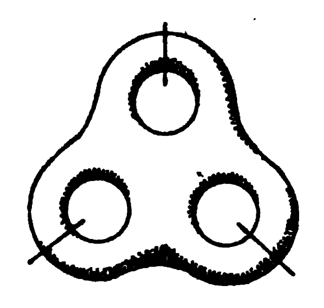
1. Um abzuzählen, dass bei $p = 3$ 28 Doppeltangenten vorhanden sind, wird man sich zunächst der Plücker'schen Formeln bedienen oder auch das Correspondenzprincip verwenden können: sei es in seiner ursprünglichen (Chasles'schen) Form, sei es, unter Verlegung der Abzählung auf die Curve 4ter Ordnung selbst, in der Cayley-Brill'schen Gestalt.

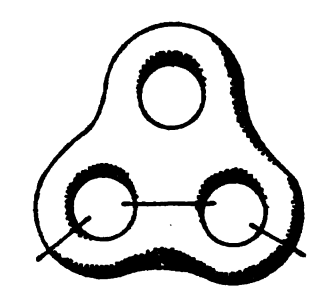
Andererseits erweist sich hier als besonders einfach die „hyperelliptische Methode". Indem wir die Curve 4. Ordnung in den hyperelliptischen Fall, d. h. einen doppeltzählenden Kegelschnitt mit 8 Scheiteln übergehen lassen, verwandeln sich die Doppeltangenten in die Verbindungsgeraden der Scheitel und das sind gerade $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$.

Endlich führt auch die „Doppelpunktsmethode" zum Ziel, und zwar in mannigfachster Weise. Ich betone dabei gern, dass all' den verschiedenen Möglichkeiten, die sich darbieten, um einer Curve vierter Ordnung einen oder mehrere Doppelpunkte zu erteilen, entsprechende Abschnürungsprocesse bei der zugehörigen Riemann'schen Fläche parallel laufen und umgekehrt.

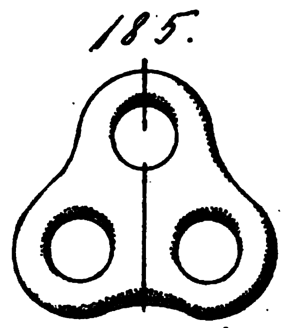
So entspricht der Möglichkeit, dass die C_4 in zwei Kegelschnitte zerfällt (und damit 4 Doppelpunkte bekommt),

daß man die Riemann'sche Fläche $p = 3$ durch 4 „Abschnürungen" in zwei Stücke vom Geschlechte $p = 0$ zerlegen kann; vergl. die nebenstehende Figur. Eine Curve vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten kann entweder eine irreducible Curve vom Geschlechte Null oder das Aggregat einer allgemeinen Curve dritter Ordnung (vom Geschlechte 1) und einer geraden Linie sein. Entsprechend lassen sich bei der Riemann'schen Fläche $p = 3$ drei Abschnürungen nebeneinander auf zweierlei Weisen anbringen.





Oder um ein umgekehrtes Beispiel etwas schwieriger Art zu geben: man zerlege die Riemann'sche Fläche, wie in der nachfolgenden Figur geschieht, durch zwei Abschnürungen in zwei gleichberechtigte Bestandteile vom Geschlechte 1:



Das wird dann zwei „elliptische" Curven zweiter Ordnung geben müssen, die sich in zwei Punkten überkreuzen! Aber eine elliptische Curve zweiter Ordnung ist notwendig eine doppeltüberdeckte Gerade mit 4 Scheiteln, unsere Curve vierter Ordnung ist in zwei Gerade dieser Art ausgeartet.

Alle die so entstehenden Gränzfälle können nun zur Abzählung der 28 Doppeltangenten herangezogen werden. Dabei wird man indess in Complicationen hineingeraten, sobald es sich (wie in unserem letzten Beispiele) um Gränzfälle handelt, bei denen gerade Linien als Bestandteile der Curve 4ter Ordnung auftreten.

Wie oft soll man diese Linien selbst als Doppeltangenten zählen? Wir wollen das bei Seite lassen und von den anderen Fällen vielleicht den, wo die C_4 in zwei Kegelschnitte zerfällt, ausführlicher betrachten. Die beiden Kegelschnitte haben 4 gemeinsame Tangenten, die solche Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung vorstellen. Ferner haben ihre 4 Schnittpunkte 6 Verbindungsgera-

den. Und von diesen muss man jede, wie leicht zu sehen, für 4 Doppeltangenten zählen. Das giebt 4+6.4 die richtige Summe 28.

Ich richte nun insbesondere die Aufmerksamkeit auf den einfachen Fall, die Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte. Die Verhältnisse, die bei ihr auftreten, finden sich nämlich mutatis mutandis weiterhin bei beliebigem p wieder. Von dem Doppelpunkte aus projicirt sich die C_4 als doppeltüberdeckte Gerade vom Geschlechte $p=2$. Eine solche Gerade hat 6 „Scheitel", daher vom Doppelpunkte an die Curve 4ter Ordnung 6 Tangenten gehen. Dieselben vertreten augenscheinlich 2.6 der im allgemeinen Falle der Curve 4ter Ordnung vorhandenen Doppeltangenten. Soll also die Zahl 28 voll werden, so müssen wir noch nachweisen, <u>dass die C_4 mit 1 Dp. 16 nicht durch den Doppelpunkt laufende Doppeltangenten besitzt</u>. Und diesen Nachweis werden wir später wieder mit Hülfe der Abel'schen Functionen führen.

Der Fortschritt, der hier erzielt ist, ist aber der: um die Zahl 28 der Doppeltangenten überhaupt abzuzählen, bedarf man der Theorie der Thetafunctionen und damit der Kenntniss der höheren Teile der Theorie der Abel'schen Functionen. Hingegen wird, um die Zahl 16 der nicht durch den Dp. laufenden Doppeltangenten

der besonderen Fälle festzulegen, die blosse Lehre vom Jacobi'schen Umkehrproblem, d.h. der elementare Teil der Theorie der Abel'schen Functionen genügen.

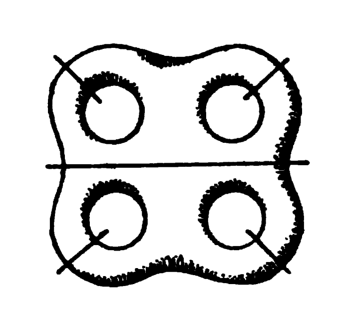
2. Gehen wir nun zu $p = 4$. Da werden wir Alles in Allem ganz ähnliche Betrachtungen anstellen können. Erstlich können wir bei gegebener C_6 des R_3 die Zahl der dreifachen Ebenen direct durch das Correspondenzprincip bestimmen. Ich darf mich hier darauf beschränken auf die bez. Angaben zu verweisen, die ich zu Anfang des Sommersemesters über die hierher gehörigen Untersuchungen von Cayley, Zeuthen und Brill gemacht habe. Die Theorie ist nicht schwierig, aber einigermassen umständlich.

Sehr viel einfacher kommen wir zum Ziele, wenn wir zweitens wieder die hyperelliptische Methode heranziehen. Man lasse die C_6 in eine doppeltzählende Raumcurve dritter Ordnung mit 10 Scheiteln ausarten, da werden die gesuchten 120 dreifachen Tangentialebenen einfach durch die 120 Ebenen geliefert, welche 3 der 10 Scheitel enthalten ($\frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$).

Wir wenden uns drittens zur „Doppelpunktmethode".

Um da doch auch wieder ein Beispiel einer zerfallenden C_6 zu geben, beachte man die Möglichkeit die Riemann'sche Fläche $p = 4$ durch 5 Abschnürungen in

zwei gleichberechtigte Teile vom Geschlechte Null zu verwandeln. Dementsprechend muss die Raumcurve sechster Ordnung in zwei Raumcurven dritter Ordnung zerfallen können welche sich in 5 Punkten treffen. Man bestätigt



das direct geometrisch, wie ich kaum auszuführen habe (der Schnitt von F_3 und F_2 kann, wenn er in 2 Curven 3ter Ordnung zerfallen soll, nur solche zwei Curven liefern, von denen die eine die geraden Linien 1ter Erzeugung, die andere die geraden Linien zweiter Erzeugung der F_2 zu Secanten hat. derartige 2 Curven schneiden sich aber auf der F_2 in fünf Punkten). Da ist denn die Abzählung der 120 dreifachen Tangentenebenen diese: Von jedem der 5 Schnittpunkte aus projiciren sich die beiden C_3 als zwei Kegelschnitte.

Daher gehen durch jeden der 5 Schnittpunkte vier gemeinsame Tangentenebenen an die beiden C_3. Dieselben sind, weil sie je durch einen Doppelpunkt der ausgearteten C_6 laufen, als dreifache Tangentenebenen der C_6 doppelt zu zählen. Das giebt $5.4.2 = 40$ dreifache Tangentenebenen. Die übrigen 80 werden durch die $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ Ebenen geliefert, welche durch 3 der 5

Punkte durchlaufen, und von denen jede, eben weil sie 3 der Punkte enthält, 8 fach zu zählen ist.

Viel wichtiger für die Folge aber ist, daß wir die Abzählung wieder bei der C_6 mit nur einem Doppelpunkte in Ansatz bringen. Von dem Dp. aus projicirt sich die C_6 als ebene C_4 (vom Geschlechte 3) und diese hat 28 Doppeltangenten. Damit haben wir 2.28 = 56 dreifache Tangentialebenen der allgemeinen C_6. Es bleibt also nun nachzuweisen, daß 120 - 56 = 64 dreifache Tangentenebenen der Curve mit Doppelpunkt vorhanden sind, welche nicht durch den Doppelpunkt gehen! Das ist wieder die Aufgabe, welche in relativ elementarer Weise durch die Theorie der Abel'schen Functionen gelöst werden wird.

[Fr. 1.7.92.] 3. Wir nehmen endlich $p = 5$ und überhaupt $p > 4$. Da können wir denn alle die vorbezeichneten Ansätze ebenfalls versuchen, aber dieselben führen zu mehr oder minder großen Complicationen mit Ausnahme allein der einfachen Doppelpunktmethode. Eben deshalb haben wir die letztere bereits vorstehend mit besonderem Nachdruck hervorgehoben.

Zunächst könnte man die Abzählung wieder direct durch Anwendung des Correspondenzprincips versuchen. Das sollte theoretisch sehr wohl durchführbar

sein, aber es wird sehr umständlich, und er ist wohl noch von keiner Seite gemacht.

Viel grösser sind die Schwierigkeiten, auf welche zweitens die hyperelliptische Methode führt. Die Zahl der viermal berührenden R_3 ist bei der C_8 des Geschlechtes 5 nach der allgemeinen Theorie $2^4(2^{5-1}) = 496$. Man lasse jetzt die C_8 in eine doppeltzählende (rationale) C_4 mit 12 Scheiteln ausarten und bestimme bei ihr die Zahl der durch 4 Scheitel gehenden R'_3. Das giebt $\frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} = 495$.

Wo ist die 496te Lösung geblieben? Das ist ohne Weiteres garnicht zu sehen. Von der Theorie der ϑ aus werden wir später lernen, dass sie unbestimmt geworden ist und durch die $\infty^2 R'_3$ vertreten wird, welche die C_4 in irgend zwei Punkten berühren. Weshalb hier aber diese $\infty^2 R'_3$ als eine Lösung mitgerechnet werden müssen, während wir doch im hyperelliptischen Falle $p=3$ die Tangenten des doppelzählenden Kegelschnittes keineswegs als eine Lösung mitgerechnet haben, ist von vorneherein garnicht zu sehen. Wir werden hier also auch die allgemeine Zahl 496 der Φ nicht so abzählen können, dass wir vom hyperelliptischen Falle beginnen, wir werden vielmehr zufrieden sein müssen, wenn wir das abweichende Verhalten des hyperelliptischen Falles in die allgemeine Theorie hin=

terhor einzuordnen vermögen.

Wollen wir nun 3^{tens} die „Doppelpunktmethode" in der Ausgestaltung heranziehen, in der sie auf zerfallende Curven führt, so ist auch das nicht ohne Weiteres zu Ende zu bringen. Man lasse die C_8 des Geschlechtes $p = 5$ in 2 rationale C_4 zerfallen, die sich in 6 Punkten treffen. Da giebt es denn $15\ R_3$, welche durch 4 der Punkte laufen. Wir haben damit $15 \cdot 16 = 240\ \phi$. Aber wie weisen wir die übrigen $256\ \phi$ nach?

Das erscheint nicht ganz einfach.

So kommen wir denn in der Tat dazu, vor allen Dingen die „einfache" Doppelpunktmethode in Ansatz zu bringen.

Möge die C_{2p+2} des Geschlechtes p einen Doppelpunkt bekommen (so zwar, wie wir der Genauigkeit halber zufügen mögen, dass sie irreducibel bleibt, ihr Geschlecht also auf $p-1$ sinkt). Indem wir vom Doppelpunkte aus projiciren, entsteht im R_{p-2} die Normalcurve des Geschlechtes $p-1$. Wir nehmen an, dass für diese die Zahl der überall berührende ϕ des Geschlechtes p bereits als $2^{p-2}(2^{p-1}-1)$ bestimmt sei. Dann haben wir damit doppelt so viele überall berührende ϕ des Geschlechtes p, also $2^{p-1}(2^{p-1}-1)$. Es bleiben noch $2^{p-1}(2^p-1)-2^{p-1}(2^{p-1})$, d.h. 2^{2p-2} nachzuweisen. Dass unsere C_{2p-2} mit Doppelpunkt 2^{2p-2} überall berührende ϕ besitzt, welche nicht durch den Doppelpunkt laufen, dieses zu zeigen, das ist jetzt die Aufgabe. Und die werden wir wieder mit Hülfe der

ersten Ansätze aus der Theorie der Abel'schen Functionen zur Erledigung bringen.

[Mo. 4.7.92.] Die vorstehend gegebenen Erläuterungen über die Abzählung der überhaupt vorhandenen reellen ϕ sollten uns gewisse Methoden geläufig machen, die wir nun insbesondere zur Abzählung der jeweils vorhandenen reellen ϕ gebrauchen wollen. Ich werde hier betreffs der letzteren vor allen Dingen das Resultat angeben, welches ich neuerdings in den Göttinger Nachrichten veröffentlichte (1892, 149). Von den $p-1$ Berührungspunkten einer ϕ kann irgend welche gerade Zahl imaginär sein, und die reellen unter ihnen werden sich irgendwie auf die λ Züge unserer Normalcurve verteilen. Gesetzt nun dass wir die Curve irgendwie continuirlich abändern, ohne sie aus ihrer Art heraustreten zu lassen, also ohne bei ihr einen Doppelpunkt entstehen zu lassen, so werden auf einem Curvenzuge, der mehrere Berührungspunkte trägt, gerne 2 derselben zusammenrücken und imaginär werden können, es werden ebensowohl zwei neue Berührungspunkte aus dem Imaginären hinzukommen können. Dagegen ist unmöglich, dass zwei reelle ϕ miteinander zusammenfallen und dann verschwinden, oder dass zwei neue ϕ aus dem Imaginären kommend hinzutreten. Denn wie soll bei einer

Curve ohne Doppelpunkt eine mehrfach zählende φ beschaffen sein? Sie müßte in mehr als $p-1$ Punkten berühren oder in einigen der $p-1$ Punkte mehrfach berühren, und das ist doch unmöglich, da sie überhaupt nur in $2p-2$ Punkten schneidet. Jede einzelne reelle φ bleibt also bei der Abänderung der Curve (solange wir nicht zu einer anderen Curvenart übergehen) reell, und was ihre Berührungspunkte angeht, so werden diejenigen Curvenzüge, welche anfänglich in einer unpaaren Zahl von Punkten berührt werden, diese ihre Eigenschaften ungeändert beibehalten, wie ebenso auch die Curvenzüge, welche von Anfang an eine paare Zahl von Berührungspunkten enthielten. Ich will daraufhin diejenigen reellen φ, welche μ verschiedene Curvenzüge mit einer unpaaren Zahl von Punkten berühren als φ_μ bezeichnen, und diejenigen φ_μ als eine „Art" von φ_μ zusammenfassen, die zu den nämlichen μ Zügen gehören. Die Zahl μ unterliegt dabei gewissen selbstverständlichen Beschränkungen. Erstlich kann μ bei geradem p nur ungerade, und bei ungeradem p nur gerade sein, denn es kann sich μ von der Gesammtheit der im algebraischen Sinne vorhandenen Berührungspunkte, also von $p-1$, doch nur um eine gerade Zahl unterscheiden. Zweitens ist μ an die beiden Ungleichungen gebunden: $\mu \leq \lambda$, $\mu \leqq p-1$, (denn es giebt nicht mehr als λ Curvenzüge und als $p-1$ Berüh-

rungspunkte). Und nun finde ich folgendes Resultat:

Von jeder Art von φ_μ, welche den angegebenen Beschränkungen nach überhaupt möglich sind, existiren im diasymmetrischen Falle allemal genau 2^{p-1}.

Im orthosymmetrischen Falle ist es genau so, nur daß die Art mit $\mu = \lambda$ in Wegfall kommt.

Man beachte, was dieses Verhalten der orthosymmetrischen Curven angeht, daß bei ihnen λ in der Tat eine Zahl ist, die von $p-1$ um ein Vielfaches von 2 abweicht.

Eine diasymmetrische Curve mit ebensovielen Zügen wird also reelle 2^{p-1} φ_λ besitzen. Wir haben damit das bisher vermißte Unterscheidungszeichen gefunden, durch welches man bei einer vorgegebenen Curve mit λ Zügen (sofern dies überhaupt zweifelhaft sein kann, d. h. sofern λ sich von $p-1$ um ein Multiplum von Zwei unterscheidet) beurteilen kann, ob eine diasymmetrische oder orthosymmetrische Curve vorliegt, ohne daß man dieserhalb nötig hätte, auf die zugehörige Riemann'sche Fläche zu recurriren: die Curve ist diasymmetrisch, sobald man auch nur eine φ construiren kann, welche alle ihre λ Züge unpaarzahlig berührt, orthosymmetrisch, sobald dies unmöglich ist. In diese Regel ordnet sich dann auch die orthosymmetrische Curve mit $(p+1)$ Zügen mit ein; bei ihr ist die Existenz irgendwelcher φ, welche

sämmtliche Curvenzüge unpaarzahlig berührte, ja von vorneherein ausgeschlossen.

Wir wollen doch, ehe wir zum Beweise der aufgestellten Satzes schreiten, die Gesammtzahl reeller ϕ constatiren, welche ihm zufolge bei der einzelnen Curve vorhanden sein muss. Da haben wir zunächst:

Bei $\lambda = 0$ giebt es 0 oder 2^{p-1} reelle ϕ, jenachdem p gerade oder ungerade ist. In der Tat kann es ja für $\lambda = 0$ nur ϕ_0 geben, und diese treten nur bei ungeradem p auf.

Ferner:

Im diasymmetrischen Fall $\lambda > 0$ giebt's $2^{p+\lambda-2}$ reelle ϕ. Nämlich bei geradem p (wo die $\phi_1, \phi_2 \ldots\ldots$ in Betracht kommen):

$$2^{p-1}\left(\binom{\lambda}{1}+\binom{\lambda}{3}+\binom{\lambda}{5}+\ldots\ldots\right) = 2^{p-1}\left(\frac{(1+1)^\lambda-(1-1)^\lambda}{2}\right)$$
$$= 2^{p-1}\cdot 2^{\lambda-1}$$

und bei ungeradem p (wo die $\phi_0, \phi_2, \ldots\ldots$ berücksichtigt sein wollen):

$$2^{p-1}\left(1+\binom{\lambda}{2}+\binom{\lambda}{4}+\ldots\ldots\right) = 2^{p-1}\left(\frac{(1+1)^\lambda+(1-1)^\lambda}{2}\right),$$

d.h. ebenfalls $= 2^{p-1}\cdot 2^{\lambda-1}$.

Endlich aber:

Im orthosymmetrischen Falle giebt's $2^{p-1}(2^{\lambda-1}-1)$ reelle ϕ. Die Abzählung ist nämlich genau, wie im diasymmetrischen Falle, nur dass hinterher von der gewonnenen Gesammtzahl 2^{p-1} abzuziehen ist,

weil die Kategorie $\mu = \lambda$ in Wegfall kommt.

Was nun den Beweis des aufgestellten Hauptsatzes angeht, so kann ich den durch die elementaren Kontinuitätsbetrachtungen, die uns hier zur Verfügung stehen, wieder nur zum Teil erbringen; den Rest müssen wir auf die Theorie der Abel'schen Functionen hinüberschieben. Wir beginnen wieder mit den niederen Fällen $p = 2, 3, 4$, bei denen Alles unmittelbar klar ist und bei denen wir daher um so leichter die Ueberlegungen vorbereiten können, welche wir bei beliebigem p benutzen wollen.

1) Bei $p = 2$ sind die ϕ, wie wir wissen, die Verzweigungspunkte der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche. Insofern dieselben reell sind (einem reellen Curvenzuge angehören) sind sie als ϕ_i zu bezeichnen.

Da soll es denn unserem allgemeinen Satze zufolge geben:

in den diasymmetrischen Fällen $\lambda = 0,\ 1,\ 2$

$0,\ 2,\ 4\ \phi_i$,

und in den orthosymmetrischen Fällen $\lambda = 1,\ 3$

$0,\ 6\ \phi_i$,

was ersichtlich richtig ist.

2). Bei $p = 3$ handelt es sich um die Realität der Doppeltangenten der ebenen Curve vierter Ordnung. Wir

haben schon auf pag. 247 der Winterautographie die Sätze kennen lernen, welche Zeuthen betreffs derselben in den nalen 7 aufgestellt hat. Genau diese Zeuthen'schen Sätze finden wir hier wieder. Wir haben zwischen Φ_0 und Φ_2 zu unterscheiden: Das sind genau Zeuthen's Doppeltangenten der ersten und der zweiten Art. Von Doppeltangenten Φ_0 wird's allemal 4 geben, von Doppeltangenten Φ_2 aber für jedes Paar von Ovalen, welches sich bei der Curve vorfindet, ebenfalls 4, ausgenommen allein die Gürtelcurve, welche mit ihren 2 Zügen orthosymmetrisch ist, und bei der daher die Φ_2 in Wegfall kommen. Hier die Tabelle der Gesammtzahlen:

	Zügezahl, diasymmetrisch.				desgl. orthosymmetrisch	
	$\lambda = 0,$	$1,$	$2,$	3	$\lambda = 2,$	4
$+\Phi_2$:	4	4	$4+4$	$4+3.4$	4	$4+6.4$
			8	16		28

Zeuthen hat l. c. diese Aufgaben durch Continuitätsbetrachtungen erwiesen, welche an die algebraische Gleichung der Curve anknüpfen; wir können ihm hierin nicht folgen, weil sich das einstweilen doch noch nicht auf die höheren p übertragen läßt.

Eine andere besonders einfache Beweismethode bietet

hier der Uebergang zum hyperelliptischen Falle (vergl. Anm. 11).
Wir erhalten für die verschiedenen Arten der C_4 als hyperelliptischen Gränzfall einen doppeltzählenden Kegelschnitt bez. mit

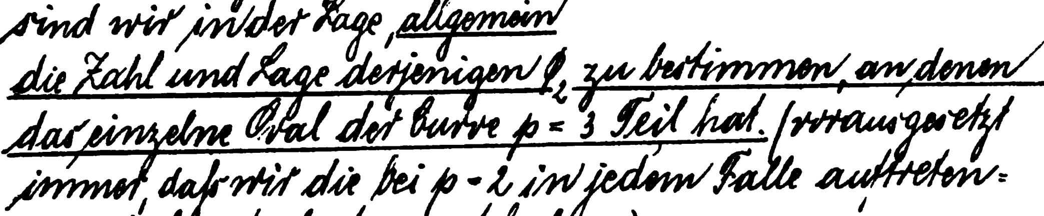
$$\bar{8},\quad 2+\bar{6},\quad 4+\bar{4},\quad 6+\bar{2},\quad \bar{8},\quad 8,$$

Verzweigungspunkten (wo die überstrichenen Ziffern sich auf die imaginären, die anderen auf die reellen Verzweigungspunkte beziehen). Da geben nun je 2 conjugirt imaginäre Verzweigungspunkte, wie je 2 reelle miteinander geradlinig verbunden eine reelle ϕ. Die Zahl der reellen ϕ wird dementsprechend in den verschiedenen Fällen

$$4,\quad 1+3,\quad 6+2,\quad 15+1,\quad 4,\quad 28,$$

was richtig ist.

[Di. 5.7.92] Wir versuchen andererseits die Doppelpunktsmethode. Bei jeder einzelnen reellen Curve 4. Ordnung können wir, wie aus der Theorie der symmetrischen Flächen hervorgeht, jedes einzelne Oval reell in einen isolirten Doppelpunkt zusammenziehen, sodass eine Curve vom Geschlechte $p=2$ entsteht: ausgenommen ist dabei nur von vorneherein die nullteilige Curve. Diejenigen ϕ nun, welche das ausgezeichnete Oval unpaarzählig berühren, fallen dabei zu je 2 zusammen und liefern, an der Curve $p=2$ gedeutet, die zu dieser Curve gehörigen reellen ϕ_1, wie die umstehende Figur erläutert. Man sieht,



daß an dem einzelnen Oval immer doppelt so viele Φ_2 der Curve $p=3$ beteiligt sind, als die resultirende Curve $p=2$ reelle Φ_1 besitzt. Auf diese Weise sind wir in der Lage, allgemein die Zahl und Lage derjenigen Φ_2 zu bestimmen, an denen das einzelne Oval der Curve $p=3$ Teil hat. (vorausgesetzt immer, daß wir die bei $p=2$ in jedem Falle auftretenden Φ_1 bereits bestimmt haben.).

Dagegen fehlt uns jeder Aufschluß über die bei der Curve $p=3$ etwa vorhandenen Φ_3. Zu einer vollen Ableitung unserer Angabe über Realität der Φ ist also die Doppelpunktmethode hier (wie später in den höheren Fällen) nicht ausreichend. Wir werden später in der Art Ergänzung schaffen, daß wir aus der Theorie der Abel'schen Functionen entweder (unter Heranziehung der ϑ Functionen) direct die Gesammtzahl der überhaupt vorhandenen reellen Φ bestimmen oder aber (unter alleiniger Heranziehung des Umkehrproblems) bei der C_4 mit Dp. die Gesammtzahl derjenigen reellen Φ festlegen, welche nicht durch den Doppelpunkt laufen.

3). Bei $p=4$ werden wir dreifache Tangentenebenen Φ_1 und Φ_3 der räumlichen C_6 zu unterscheiden haben,

(wobei wir späterhin die Φ_i in Φ_i', Φ_i'' und Φ_i''' werden teilen können, jenachdem alle 3 Berührungspunkte der Φ_i auf demselben Curvenzuge liegen, oder 2 derselben imaginär sind oder endlich auf ein zweites Oval hinübergerückt sind).

Unserem allgemeinen Theoreme nach sollen nun die Verhältnisse folgende sein:

α) Die niederste diasymmetrische Curve ($\lambda = 0$) wie die niedrigste orthosymmetrische Curve ($\lambda = 1$) besitzen keinerlei Φ, und damit überhaupt keine reellen Φ.

β) Die diasymmetrischen Curven $\lambda = 1, 2$ und die orthosymmetrische Curve $\lambda = 3$ besitzen für jedes ihrer Ovale 8 Φ_i, aber keine Φ_3.

γ) Die diasymmetrischen Curven $\lambda = 3, 4$ und die orthosymmetrische Curve $\lambda = 5$ besitzen ebenfalls für jedes ihrer Ovale 8 Φ_i, außerdem aber für jedes Tripel von Ovalen 8 Φ_3.

Dies giebt denn die Gesammtzahlen der folgenden Tabelle:

	diasymmetrisch					orthosymmetrisch		
	$\lambda = 0$,	1,	2,	3,	4	1,	3,	5
Zahl der Φ =	0,	8,	$2\cdot 8$,	$3\cdot 8+8$,	$4\cdot 8+4\cdot 8$;	0,	$3\cdot 8$,	$5\cdot 8+10\cdot 8$
			16	32	64		24	120

Zum Beweise ziehen wir zunächst wieder die hyperelliptische Methode heran. Die kann natürlich nicht mehr leisten, als dass sie diejenigen Curvenarten erledigt, bei denen hyperelliptische Fälle überhaupt auftreten. Die orthosymmetrische Tripelcurve bleibt hier also von selbst bei Seite.

In den übrigen Fällen ergiebt sich ohne Weiteres die gewünschte Bestätigung. Wir haben, indem wir uns der Bezeichnung von p. 197 bedienen

	diasymmetrisch					orthosymmetrisch	
Verzweigungsp.	$\lambda = 0$	1	2	3	4	1	5
d. hyperell. Geb.	$0+\overline{10}$	$2+\overline{8}$	$4+\overline{6}$	$6+\overline{4}$	$8+\overline{2}$	$0+\overline{10}$	$10+\overline{10}$

Nun wird eine reelle ϕ entstehen, wenn wir entweder drei reelle Verzweigungspunkte durch eine Ebene verbinden oder einen reellen und zwei conjugirt imaginäre. Dies giebt also in den einzelnen Fällen:

reelle ϕ:	0	24	$4+4\cdot 3$	$20+6\cdot 2$	$56+8\cdot 1$	0	120
d.h.	0	8	16	32	64	0	120,

was mit den Behauptungen unseres Theorems übereinstimmt.

Wir wenden uns ferner zur Doppelpunktmethode. Da erledigen sich die diasymmetrischen Fälle $\lambda = 1, 2, 3, 4$

und die orthosymmetrischen $\lambda = 3, 5$ von selbst. Denn aus der Gestalt der zugehörigen symmetrischen Flächen ist ersichtlich, dass man bei ihnen ein beliebiges der Ovale so in einen isolirten Doppelpunkt reell zusammenziehen kann, dass die Curve in eine irreducibele Curve des Geschlechtes 3 übergeht. Indem wir sodann letztere Curve vom isolirten Doppelpunkte aus projiciren, entsteht eine reelle Curve 4ter Ordnung, deren reelle Doppeltangenten Φ_0 und Φ_2 je zwei reelle Φ_1 und Φ_3 vertreten, an denen das von uns ausgezeichnete Oval der ursprünglichen C_6 participirt. Das liefert dann aber für dieses Oval, und damit für jedes andere Oval der Curve, diejenige Angabe über die zugehörigen Φ_1 und Φ_3, die unserem allgemeinen Theoreme entsprechen. So liefert der Satz, dass jede reelle ebene C_4 vier Doppeltangenten Φ_0 hat hier den Satz, dass jedes unserer Ovale acht zu ihm gehörige Φ_1 besitzt. Wir brauchen das nicht weiter zu verfolgen. Auch werden wir kaum bedauern, dass der Ansatz der Doppelpunktmethode im Falle $\lambda = 0$ versagt; denn es ist a priori klar, dass in dem Falle überhaupt keine reellen Φ vorhanden sein können.

Es ist hiernach nur der orthosymmetrische Fall $\lambda = 1$, der besondere Ueberlegung verlangt. Wir können auch bei der orthosymmetrischen Fläche $\lambda = 1$ die eine da überhaupt vorhandene Symmetrielinie zu einem Punkte

zusammenziehen; nur verwandelt sich dann die Fläche nicht etwa in eine symmetrische Fläche $p=3$, sondern in zwei zueinander symmetrische, von einander abgetrennte Flächen $p=2$. Wir werden wissen wollen, was das für unsere C_6 bedeutet. Der besseren Uebersicht halber wollen wir die Frage so erweitern, daß wir auch die Fälle betrachten, wo eine orthosymmetrische Fläche mit 5, bez. 3 Symmetrielinien vorliegt, und man aus ihr zwei abgetrennte Bestandteile macht, indem man die 5 bez. 3 Symmetrielinien gleichzeitig zu Punkten zusammenzieht. Diese Bestandteile haben dann bez. $p=0$ und $p=1$. Nun wurde der Fall, daß beim Entstehenlassen von 5 Doppelpunkten unsere C_6 in zwei rationale C_3 zerfällt, schon eben nach seiner algebraischen Bedeutung erörtert: neu ist jetzt nur, daß die beiden Raumcurven dritter Ordnung, welche dabei entstehen, conjugirt imaginär sind und sich dabei in fünf reellen Punkten schneiden.

Analog müssen offenbar im Falle $\lambda=1$ zwei Curven 3ter Ordnung vom Geschlecht 2 entstehen, die dann 3, bez. 1 Punkt gemein haben sollen. Aber eine elliptische Curve 3ter Ordnung ist notwendig eben. Da tritt uns die Bedeutung des Falles $\lambda=3$ ohne Weiteres hervor. Es handelt sich offenbar darum, daß die F_2, welche mit einer F_3 zusammen als Schnitt unsere C_6 erzeugt, in ein

Ebenenpaar zerfällt und dann die F_3 in der Tat zwei Ebenen C_3 schneidet, die 3 Punkte miteinander gemein haben.
Analog muß sich der Fall $\lambda = i$ erledigen.
Eine C_3 vom Geschlechte 2 ist nichts Anderes als eine dreifach überdeckte gerade Linie mit 8 Verzweigungspunkten. Zwei solche Gerade die sich in einem Punkte schneiden das ist die Ausartung der C_6, die im Falle $\lambda = i$ eintritt. Daß wir aber bei einer solchen Ausartung unmöglich die Φ ohne weiteres abzählen können, leuchtet ohne weiteres ein. Daher fällt also der orthosymmetrische Fall $\lambda = i$ definitiv aus der Reihe derjenigen heraus, die man mit Hülfe der Doppelpunktmethode behandeln kann.
So ist denn für $p = 4$ weder die hyperelliptische Methode noch die Doppelpunktmethode ausreichend, um den vollen Beweis unseres Theorems zu geben; wohl aber liefern sie diesen Beweis, wenn man sie beide combinirt. Auch würde die Doppelpunktmethode für sich genügen, wenn man der Theorie der Abel'schen Functionen vielleicht die Gesammtzahl der in jedem Falle vorhandenen reellen Φ entnehmen wollte.
[Di. 5.7.92. II] Die hiermit für $p = 3$ und $p = 4$ besprochenen Verhältnisse sind nun für die höheren p typisch (sobald man auch bei diesen die Doppelpunktsmethode anwenden und die Voraussetzung machen will, die Abzählung

der reellen φ sei für das Geschlecht $p-1$ bereits erledigt).

Des Näheren stellt sich die Sache so:

1). Ungerade p. Die Doppelpunktsmethode kann bei allen nicht nullteiligen Curven angewandt werden und liefert Zahl und Verteilungsweise derjenigen zugehörigen reellen φ, welche wenigstens ein Oval ungeradzahlig berühren, d. h. der φ_2, φ_4, ..., immer in Uebereinstimmung mit unserem allgemeinen Theoreme. Dagegen bleibt die Zahl der φ_0 (welche unserem Theoreme nach allemal 2^{p-1} betragen soll) unerledigt.

In dieser Hinsicht wird uns die Theorie der Abel'schen Functionen später zweierlei ergänzende Ansätze an die Hand geben, indem wir von denselben aus entweder (mit Hülfe der Thetafunctionen) die Gesammtzahl der im einzelnen Falle reellen φ, oder doch für die Curve mit Doppelpunkt (und dann mit bloßer Hülfe des Umkehrtheorems) die Gesammtzahl der im einzelnen Falle reellen, nicht durch den Doppelpunkt gehenden φ bestimmen können.

2). Gerade p. Hier giebt es φ_1, φ_3, φ_5, ...

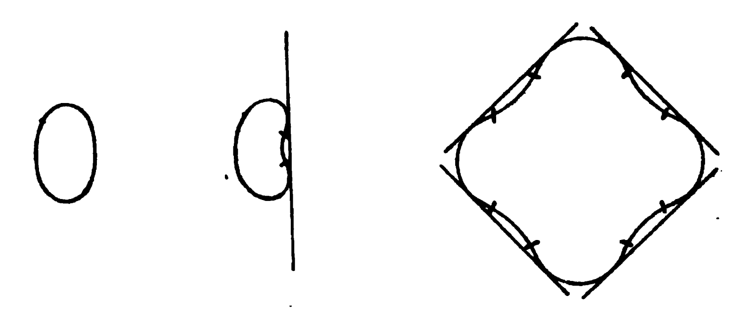
Bei der nullteiligen Curve sind daher alle φ imaginär; es ist gar kein Problem bei ihnen zu erledigen. Alle anderen Fälle erledigen sich durch die Doppelpunktsmethode mit alleiniger Ausnahme des orthosymmetri-

schen Falles $\lambda = i$. Bei letzterem sollen unserem allgemeinen Theoreme zufolge $2^{p-1}\phi_i$ vorhanden sein. Ich bin nur so in der Lage dies zu beweisen, daß ich vermöge der Theorie der Thetafunctionen allgemein die Gesammtzahl der in jedem Falle vorhandenen reellen ϕ bestimme.

So wenden wir uns denn jetzt zu dem neuen Kapitel: zur Anwendung der Abel'schen Functionen und dürfen vorweg bemerken, wenn wir da etwas weiter ausholen müssen, daß unsere bisherigen Fragestellungen da nicht nur zur Erledigung kommen werden, sondern auch eine außerordentliche Verallgemeinerung erfahren sollen, vermöge deren sich alle unsere bisherigen Entwickelungen als Einzelheiten in ein großes Ganzes einordnen.

Es ist nur anhangsweise, daß wir versuchen, eine besondere Realitätsbetrachtung noch von den Curven 4ter Ordnung $p=3$ auf die Curven 6ter Ordnung $p=4$ zu übertragen. Wir trennen die ϕ_o der Curve vierter Ordnung in ϕ_o' und ϕ_o'', jenachdem die beiden Berührungspunkte der ϕ_o reell oder imaginär sind. Wir ziehen ferner die Wendetangenten w der Curve 4ter Ordnung in Betracht und unterscheiden zwischen reellen Wendetangenten w' und imaginären w''. Dann hebt Zeuthen Ann. 7 (1874) hervor, daß bei jedem einzelnen Oval der

Curve vierter Ordnung die Zahl der w' doppelt so groß ist, wie die Zahl der zu ebendem Ovale gehörigen Φ_0': $w' - 2\Phi_0' = 0$, wie dies durch folgende Figuren etwa erläutert wird:



(Die Sache ist eben die, daß eine jede Φ_0' des Ovals eine „Einbuchtung" desselben abschließt). Da insgesammt bei unserer Curve $\Phi_0' + \Phi_0'' = 4$ ist, so folgt aus diesem Ansatze, indem wir unter w' nunmehr die Gesammtzahl der reellen Wendetangenten der Curve verstehen, $w' + 2\Phi_0'' = 8$. Diese Gleichung ist es, die ich seiner Zeit zu einer allgemeinen Realitätsrelation für ebene Curven mit nur einfachen Plücker'schen Singularitäten erweiterte, worüber auf pag. 250 ff. der Winterautographie das Nähere mitgeteilt ist. Ich erwähne das hier nur beiläufig, da mir daran liegt, zunächst einmal die für das einzelne Curvenoval geltende Formel $w' - 2\Phi_0' = 0$ als solche auf die Raumcurven 6ter Ordnung, $p = 4$ zu übertragen.

Der erste Schritt zu der gewollten Uebertragung ist, daß

wir die Zeuthen'sche Regel in eine verallgemeinerungsfähige Form setzen. Ich will die ϕ_0' und w' der einzelnen Ovals zu dem Zwecke als „Gerade [2,2] und [3,1]" bezeichnen; daß irgendwelche Gerade in eine dieser beiden Kategorieen gehört, wird sich durch zwei Bedingungen ausdrücken, und eben darum das Auftreten von Geraden [2,2], oder [3,1], noch keine Bedingung für die Curvencoefficienten einführen. Anders ist es, wenn wir das Vorhandensein von Geraden [4] verlangen wollen, die werden nicht anders auftreten können, als wenn wir die Curvencoëfficienten einer bestimmten Bedingung unterwerfen. Der Beweis der Zeuthen'schen Regel ruht nun in der doppelten Bedeutung welche wir einer Geraden [4] als Uebergangsfall beilegen können, vergl. die nebenstehende Figur. Die Gerade [4] erscheint dort einerseits als Uebergangsfall zwischen einer zum Oval gehörigen ϕ_0' und einer ϕ_0'', andererseits als Uebergangsfall zwischen 2 reellen w' und zwei imaginären w''. Wir werden, ohne daß wir die Figur betrachten schließen, daß beim Passiren dieses Uebergangsfalles $w'+2\phi_0'$ constant bleiben muß; ein Blick auf die Figur ge-

nügt dann, um erkennen zu lassen, dass es sich um $r' - 2\,\varphi'_0$ handelt. Wir brauchen jetzt nur noch zu überlegen, dass bei einem Oval ohne Doppelpunkt eine Aenderung in der Tat der φ', r' überhaupt nur durch das Vorkommniss [4] herbeigeführt werden kann, um den Schluss zu haben, dass $r' - 2\,\varphi'_0$ für das einzelne Oval einer Curve vierter Ordnung, die sich innerhalb ihrer „Art" irgendwie ändern mag, überhaupt constant ist. Und nun werfen wir wieder den Blick auf irgendwelche gezeichnet vorliegende Curve 4ter Ordnung, um zu erkennen, dass $r' - 2\,\varphi'_0$ eben allemal $= 0$ ist.

Versuchen wir nun, für das einzelne Oval der Raumcurve sechster Ordnung $p = 4$ etwas Entsprechendes zu machen. Wir werden da zunächst die „singulären" Ebenen aufzählen, welche sich einstellen können, ohne dass die Coefficienten der Curve einer besonderen Bedingung unterworfen werden. Es handelt sich offenbar um die Vorkommnisse $(2,2,\dot{2})$, $(3,2,1)$, $(4,1,1)$, also um die dreifachen Tangentenebenen, die zum Oval gehören, φ_1, diejenigen Osculationsebenen desselben, welche das Oval noch einmal berühren, OT, endlich seine Hyperosculationsebenen, H. Des genaueren wollen wir eine φ_1, welche

das Oval in 3 reellen Punkten berührt, mit Φ_i' bezeichnen, mit Φ_i'' aber eine Φ_i, welche das Oval nur in einem reellen Punkte berührt, während die beiden anderen Berührungspunkte entweder imaginär sind oder auf einem anderen Ovale der Curve liegen (was wir hier also nicht weiter unterscheiden).

Ebenso teilen wir die H in H' und H''; die H' sind solche Hyperosculationsebenen, welche das Oval noch in zwei reellen einzelnen Punkten schneiden, die H'' solche, welche außer im Hyperosculationspunkte überhaupt nicht treffen.

Fragen wir nun vorab, ob irgend zwei Φ_i, OT, H, solange unsere Curve keinen Doppelpunkt bekommt, zusammenrücken können. Bei den Φ_i, wie überhaupt den Φ, ist dies, wie wir schon früher bemerkten, ausgeschlossen, weil beim Zusammenrücken zweier (2,2,2) eine Ebene mit mehr als 3 Berührungspunkten oder eine Ebene mit drei Berührungspunkten entstehen müßte, deren Gesammtmultiplicität höher ist, als bei einer Curve sechster Ordnung möglich ist.

Dagegen können zwei OT in [4,2] oder in [3,3], zwei H in [5,1] zusammenrücken. Wir schließen, daß bei unserem Ovale die Gesammtzahl der zugehörigen Φ_i constant sein wird, während für die

<u>Gesammtzahl der zugehörigen OT oder H eine sol-
che Notwendigkeit nicht besteht.</u> Erstens stimmt ja
auch mit dem, was wir über die Realität der Φ_i von
früher wissen ($\Phi_i = 0$ bei dem Curvenzuge der ortho-
symmetrischen Curve $\lambda = 1$, $\Phi_i = 8$ für jeden einzelnen
Curvenzug aller anderen Curven 6ter Ordnung).

Wir zählen nunmehr diejenigen singulären
Ebenen auf, welche vorhanden sein können, sobald man
die Constanten der Curve einfach particularisirt. Es
sind dies [3,3], [4,2], [5,1]. Die Frage muss sein, zwischen
welchen allgemeinen Vorkommnissen diese hier den
Uebergang bilden mögen. Da ist zunächst [3,3] der
Uebergang zwischen zwei reellen und zwei imagi-
nären [3,3,1], d.h. OT. Dann aber [4,2] ein Ueber-
gang im dreifachen Sinne:

a) der Uebergang zwischen einer Φ_i' und einer
Φ_i'' {zwischen (2,2,2) und ($\bar{2}$,2,2), um es noch deutli-
cher zu bezeichnen},

b) der Uebergang zwischen zwei reellen und
zwei imaginären OT,

c) der Uebergang zwischen einer H' und einer H''
{nämlich zwischen (4,1,1) und (4,$\bar{1}$,$\bar{1}$)}.

Endlich ist (5,1) der Uebergang zwischen zwei reel-
len und zwei imaginären H, die reellen H sind da-

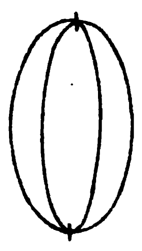
bei aber notwendig H' da doch bei (5, 1) der einzeln liegende Schnittpunkt notwendig reell ist.

Indem wir diese Angaben überblicken, fragen wir, ob irgendwelche Combination unserer Anzahlen bei allen diesen Uebergängen constant bleiben mag. Wir bemerken, daß dies einmal (wie wir bereits wissen) für die Summe $\Phi_i' + \Phi_i''$ der Fall sein muß. Dann aber daß das gleiche für die Combination $\Phi_i' \pm H''$ eintritt (wo über das Vorzeichen noch durch Betrachtung der Figuren zu entscheiden sein wird). In der Tat participirt ja nur H', nicht H'' an dem Vorkommnisse (5, 1). Wir gewinnen also in der Tat eine neue Relation, die wir vorläufig in der unbestimmten Form aussprechen:

<u>Für jeden einzelnen Zug der Curve sechster Ordnung ist $\Phi_i'' \pm H''$ constant.</u> Wir müssen jetzt noch über das Vorzeichen des Ausdruckes und über den Zahlenwerth der Constante entscheiden. Hierbei werden wir die orthosymmetrische Curve $\lambda = i$ wieder von allen anderen Fällen abgetrennt halten müssen. Bei ihr ist Φ, und also auch Φ_i' überhaupt $= 0$. Irre ich nicht, so ist bei ihr auch $H'' = 0$, sofern man einen solchen Fall betrachtet, der in der Nähe einer doppeltzählenden Raumcurve 3ter Ordnung liegt. Unsere Ueberlegung würde dann ergeben, <u>daß bei der orthosym.</u>

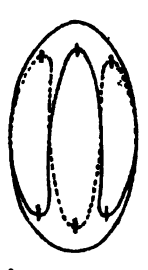
metrischen Curve mit $\lambda = i$ überhaupt $H'' = 0$ ist.

Um die Form der anderen Curvengattung zu untersuchen, denke ich mir zunächst etwa ein Rotationsellipsoid mit 3 unter 60° gegen einander geneigten Ebenen geschnitten, die durch eine Axe gehen:



(Vorderseite des Ellipsoids)

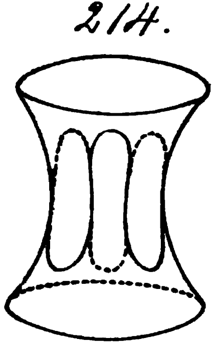
und setze dann an Stelle der Gleichung der 3 Ebenen: $pqr = 0$ die andere $pqr = \varepsilon$, unter ε eine kleine Grösse verstanden. So entsteht ein Curvenoval, wie es in folgender Figur gezeichnet ist.



(Vorder- und Rück-Seite des Ellipsoids; die Curve auf der Rückseite ist punctirt).

Man erkennt das Vorhandensein zweier (horizontaler) Φ_i, sowie von sechs H'' (die betr. Hyperosculationspunkte liegen in den sechs „Scheiteln" der Curve,*) aus Symmetriegründen) Ich zeichne ferner ein analog gestaltetes Oval auf einem Rotationshyperboloid:

*) die ich durch Striche markirte.



Der Unterschied ist, daß jetzt die 6 Scheitel des Ovals nach außen gebogen sind. Infolgedessen sind jetzt noch 6 weitere Ebenen Φ' vorhanden, deren einzelne (ungefähr) in drei auf der Curve aufeinanderfolgenden Scheiteln berührt (z. B. in den drei Scheiteln der Vorderseite unserer Zeichnung).

Andererseits haben sich die sechs H'', die vorhin vorhanden waren, jetzt in Ebenen H' verwandelt. Wir erkennen, daß in beiden Fällen die Summe $\Phi' + H''$ den den gleichen Betrag 8 hat und schließen, daß dieselbe überhaupt acht bei jedem Ovale betragen muß, welches sich aus den hier betrachteten durch Continuität ableitet. Das muß also, nach unserer Kenntniß der Curve 6ter Ordnung zunächst von allen Ovalen derjenigen einteiligen Art gelten, der die gezeichneten Beispiele angehören, d.h. von den Ovalen der einteiligen diasymmetrischen Curve. Von da aus wird man's auf die Ovale aller anderen Curvenarten übertragen, die einteilige orthosymmetrische Curve ausgenommen.

Doch verfolgen wir das hier nicht weiter und ver-

weisen zum Schluss nur noch auf die Arbeit von Franz Meyer, von der auf pag. 87, 94 der gegenwärtigen Ausarbeitung die Rede war. Das von Franz Meyer abgeleitete Resultat ist jedenfalls mit dem hier gewonnenen nicht in Widerspruch.

[Do. 7.7.92]

II Heranziehen der Abel'schen Functionen.

Ich werde hier die Grundlegung der Theorie nur ganz kurz berühren können; Genaueres findet man in meinen Vorlesungen über Abel'sche Functionen (1888–89), in meinem Aufsatze in Ann. 36 (1889), endlich in dem demnächst erscheinenden zweiten Bande der elliptischen Modulfunctionen, ich nenne hier nur diese meine eigenen Darstellungen, weil ich andernfalls die ganze weitschichtige Literatur des Gegenstandes würde aufzaehlen müssen, was viel zu weit führen würde.

A. Allgemeines, bis zum Umkehrtheorem inclusive.

1. Vorerinnerungen. Die wesentlichen Grundlagen der hier anzustellenden Entwickelungen sind bereits im Wintersemester gegeben worden. Es handelt sich zunächst darum, auf der Riemann'schen Fläche ein System kanonischer Querschnitte

$A_1, B_1; A_2, B_2; \ldots\ldots A_p, B_p$ festzulegen (Winterautographie p. 42 ff). Wir haben dann ferner die zugehörigen Normalintegrale erster Gattung $j_1, j_2, \ldots\ldots j_p$ mit den Perioden $\tau_{\alpha\beta}$ (W. A. p. 60 ff.), endlich die Normalintegrale dritter Gattung $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ (W. A. p. 65 ff.). Betrachtet man letztere als Funktionen von x, so zeigen sie an den Querschnitten

$$A_1, \ldots\ldots\ldots A_p, \quad B_1, \ldots\ldots\ldots B_p$$

die Perioden

$$0, \ldots\ldots\ldots 0, \quad 2i\pi j_1^{\xi\eta}, \ldots\ldots\ldots 2i\pi j_p^{\xi\eta}.$$

Uebrigens gilt für sie Vertauschung von Parameter und Argument:

$$\Pi_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{xy}^{\xi\eta}.$$

2. Vom Abel'schen Theoreme. Das sogenannte Abel'sche Theorem bezieht sich auf diejenigen Werthe, welche irgend welches vorgelegte Integral, J, annimmt, wenn es zwischen den Punkten $x_1, x_2 \ldots x_m$ einer ersten Punktgruppe und den Punkten $x_1', x_2' \ldots x_m'$ einer zweiten aequivalenten Punktgruppe hinerstreckt wird. Oder, um es genauer zu bezeichnen: sei z eine algebraische Funktion der Riemann'schen Fläche, welche in den Punkten $x_1, \ldots\ldots x_m$ (und nur in diesen) den Werth C, in den Punkten $x_1', \ldots\ldots x_m'$ (und abermals nur in diesen) den Werth C' annimmt: daß es eine solche Funktion giebt, ist ja gerade die Definition der Aequivalenz. Wir breiten jetzt unsere Fläche m-blättrig

über der z Ebene aus, worauf die m. Punkte x bei z = c vertical übereinander liegen werden, die m Punkte x' bei z = c'. Wir ziehen ferner in der z Ebene zwischen z = c und z = c' irgendwelche Curve, welche auf die darüberliegende Fläche übertragen durch keinen Verzweigungspunkt derselben hindurchführt. Vermöge derselben erscheinen dann die m Punkte x und die m Punkte x' in bestimmter Weise zusammengeordnet, und ich will annehmen, daß die Bezeichnung von vornherein gerade so gewählt sei, daß dem x_1 das x'_1; . . . . dem x_m das x'_m zugewiesen wird. Nun handelt es sich im Abel'schen Theorem um die folgende Integralsumme: $J^{x_1 x'_1} + J^{x_2 x'_2} + \ldots\ldots J^{x_m x'_m}$ jedes einzelne J hinerstreckt längs desjenigen Integrationsweges auf der Riemann'schen Fläche, der zwischen den beiden Gränzpunkten oberhalb der in der z-Ebene vorgezeichneten Curve verläuft. Da können wir denn für die Summe sofort schreiben

$$\int_{c'}^{c} \left(\left(\frac{dJ}{dz}\right)_1 + \left(\frac{dJ}{dz}\right)_2 + \ldots\ldots\ldots \left(\frac{dJ}{dz}\right)_m \right) dz,$$

das Integral hinerstreckt längs der in der z-Ebene gezeichneten Curve. Und hier ist nun der mit dz multiplicirte Factor eine symmetrische Function der Werte, welche $\frac{dJ}{dz}$ in den verschiedenen Blättern der Riemann'

schen Fläche annimmt, d. h. eine rationale Function von x.
Unsere Summe nimmt daher den folgenden Wert an

$$\int_{c'}^{c} \chi(z) \cdot dz,$$

wo es sich nur noch darum handeln wird, die rationale Function $\chi(z)$ je nach der Eigenart des gerade betrachteten Integrals (nach der Zahl und Lage seiner Unendlichkeitspunkte u. s. w.) festzulegen.

Wir specificiren diesen Ansatz hier, ohne die Einzelheiten auszuführen, für die j und die Π. Wir finden zunächst, als <u>Abel'sches Theorem für die Integrale 1ter Gattung:</u>

$$j_\alpha^{x_1 x_1'} + j_\alpha^{x_2 x_2'} + \dots j_\alpha^{x_m x_m'} = 0 \quad (\text{für } \alpha = 1, 2, \dots p),$$

<u>ferner aber als Abel'sches Theorem für die Integrale dritter Gattung:</u>

$$\Pi_{\xi\eta}^{x_1 x_1'} + \Pi_{\xi\eta}^{x_2 x_2'} + \dots \Pi_{\xi\eta}^{x_m x_m'} = \log \frac{(\xi - c)\cdot(\eta - c')}{(\xi - c')\cdot(\eta - c)}$$

(wo rechter Hand unter ξ, η nicht die „Flächenpunkte" ξ, η sondern die „Werte" verstanden sind, welche z in diesen Flächenpunkten annimmt). Uebrigens controliren wir letztere Formel, indem wir (vermöge des Vertauschungssatzes und der früheren Angabe über die Periodicität Π) die Perioden berechnen, welche die Summe der Π als Function von ξ, oder η, an den Querschnitten $A_i B_i$ bez. bei Umlaufung der Punkte x, x' besitzt.

3) Von der Umkehr der Abel'schen Theoreme. [Fr. 8.7.92]

Es handelt sich nunmehr darum, dass man rückwärts aus den p Gleichungen:

$$e^{\Pi_{\xi\eta}^{x_1 x_1'} + \Pi_{\xi\eta}^{x_2 x_2'} + \dots\dots\dots \Pi_{\xi\eta}^{x_m x_m'}}$$

aufzubauen und sich zu überzeugen sucht (indem man die eben angedeuteten Ueberlegungen über die Periodicität der einzelnen Π rückwärts durchläuft), dass hier eine algebraische Function von ξ vorliegt, welche gerade in den $x_1 \dots x_m$ verschwindet, in den $x_1' \dots\dots x_m'$ unendlich wird, was doch die Definition der Aequivalenz ist.

4. Vom Umkehrproblem und den allgemeinen Eigenschaften seiner Lösung.

Man denke sich m Punkte $y, y_1, y_2, \dots\dots y_m$, ferner p Grössen K_α irgendwie gegeben. Das Umkehrproblem in seiner allgemeinsten Fassung verlangt dann, die p Gleichungen

$$\int_\alpha^{x_1 y_1} + \dots \int_\alpha^{x_m y_m} = K_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots p)$$

nach den x aufzulösen.

Da ist zuvörderst ersichtlich, dass mit jeder Punktgruppe $x_1' \dots\dots x_m'$ auch jede mit ihr aequivalente Punktgruppe $x_1' \dots\dots x_m'$ eine Lösung sein wird, so wie umgekehrt, dass zwei verschiedene Lösungen $x_1 \dots x_m$, $x' \dots x_m'$, (falls solche existiren sollten) einander aequivalente Punktgruppen vorstellen. Es ist also nicht

sowohl eine einzelne Punktgruppe G_m, welche hier gesucht wird, als eine Vollschaar aequivalenter Punktgruppen.

Bezeichnen wir dieselbe mit G_m^q, so wird q in bekannter Weise den Wert $(m-p+\sigma)$ haben unter σ das Ergänzungsglied des Riemann-Roch'schen Satzes verstanden, auf dessen Definition wir hier nicht noch einmal zurückkommen.

Uebrigens wird diese Vollschaar von Punkten x ungeändert bleiben, wenn man die K_α irgendwie um simultane Perioden der Integrale j_α vermehrt. Eine solche Vermehrung kann dadurch entstehen, daß man bei gegebenen x, y den einzelnen Integrationsweg $x_i\,y_i$ um einen Periodenweg abändert oder auch so, daß man zwei der x irgend mit einander vertauscht.

Man sollte also die Gleichungen des Umkehrproblems lieber so schreiben:

$$j_\alpha^{x_1 y_1} + j_\alpha^{x_2 y_2} + \dots\; j_\alpha^{x_m y_m} \equiv K_\alpha \;(\text{mod. Perioden})$$

und wird sich das Sachverhältniß in der Weise einprägen können, daß man sagt: die G_m^q, welche die Lösung des Umkehrproblems ausmacht, hänge von den K_α eindeutig und $2p$ fach periodisch ab.

5. Vom Umkehrtheorem. Ich verstehe unter Umkehrtheorem den Satz, der darüber Aufschluß giebt, wann überhaupt das Umkehrproblem eine Lösung hat. Die Existenz

der Lösung wurde ja soeben ohne weitere Begründung supponirt, es ist da also noch eine Ergänzung nötig.

In dieser Hinsicht wird man von vornherein erkennen, dass für $m < p$ nur in Ausnahmefällen Lösungen vorhanden sein können, indem für die Wertsysteme der $y_1 \dots y_m, k_\alpha$, welche da eine Lösung zulassen, jedenfalls $(p-m)$ Bedingungen erfüllt sein müssen. Die nähere Formulirung dieser $(p-m)$ Bedingungen würde uns hier allerdings zu weit führen. Wir beschränken uns also auf die Fälle $m \geqq p$ und sprechen da auch nur ohne Beweis den fundamentalen Satz aus, dass das Umkehrproblem bei $\geqq p$ in der Tat immer Lösungen hat, dass also bei $m \geqq p$ nicht nur alle besonderen Gleichungen für die $y_1 \dots y_m, k_\alpha$ wegfallen (wie nach der Zahl der Variabelen selbstverständlich), sondern auch alle Ungleichungen (an die man doch hier, wo wir mit transcendenten Functionen zu tun haben, denken könnte).

Mit den so aufgezählten fünf Puncten haben [Mo. 11.7.92.] wir bereits die Grundlage für einen grossen Teil der für uns in Betracht kommenden Anwendungen der Abel'schen Functionen auf Geometrie.

Ich werde diese ganze Erläuterung der grösseren Bestimmtheit halber zunächst an die Curve C_{2p-2} der φ anknüpfen,

was anderweitige Curven angeht, so wird bezüglich ihrer weiter unten eine bez. Bemerkung gemacht werden.

Wir knüpfen an den Umstand an, der vor Pfingsten zum Nachweis gebracht wurde (pag. 98 ff der vorliegenden Autographie), daß die Curve der y eine „Elementarcurve" ist, d. h. daß die Flächen 1ten, 2ten, 3ten etc. Grades des sie enthaltenen Raumes aus ihr allemal Vollschaaren aequivalenter Punkte ausscheiden, nämlich die

Ebenen f_1 . . . . eine G^{p-1}_{2p-2}

die f_2 . . . . eine G^{3p-4}_{4p-4}

die f_3 . . . . eine G^{6p-5}_{6p-6} etc.

(von denen nur die erste eine Specialschaar ist und zwar die einzige Specialschaar G^{q}_{2p-2}, welche es giebt).

Seien nun

$$y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_{2p-2}$$

irgend $2p-2$ Punkte unserer Curve, die in einer Ebene gelegen sind. So werden andere $2p-2$ Punkte

$$x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_{2p-2}$$

der Curve gleichfalls in einer Ebene liegen, sobald wir dafür sorgen, daß sie zu den y „aequivalent" sind. Es werden ferner $4p-4$ Punkte der Curve:

$$x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_{4p-4}$$

auf einer f_2 liegen, sobald wir dafür sorgen, daß sie mit den zweimal gezählten Punkten y „aequivalent"

sind, etc. Aber dieses „Aequivalentsein" drückt sich durch das Abel'sche Theorem in den Gleichungen aus:

$$\left.\begin{aligned}&\int_\alpha^{x_1,y_1} + \dots\dots\dots \int_\alpha^{x_{2p-2},y_{2p-2}} \equiv 0 \pmod{P}\\ \text{bez. } &\int_\alpha^{x_1,y_1} + \int_\alpha^{x_2,y_2} + \dots\dots \int_\alpha^{x_{4p-4},y_{2p-2}} \equiv 0 \pmod{P}\end{aligned}\right\}\alpha = 1,2 \dots p$$

(wo in der letzten Gleichung jeder der $2p-2$ Punkte y zweimal als Integralgränze benutzt sein wird). Umgekehrt werden wir sagen, daß diese Gleichungen des Abel'schen Theorems jetzt durch die Angabe über die Lage der $2p-2$ bzw. $4p-4$ Punkte x ihre geometrische Interpretation finden.

Uebrigens ist für die späteren Formeln bequemer, sämmtliche untern Integralgränzen in einen einzelnen beliebig gewählten Punkt z der Curve zu verlegen.

Sei $\int_\alpha^{y_1,z} + \int_\alpha^{y_2,z} + \dots\dots \int_\alpha^{y_{2p-2},z} \equiv K_\alpha \pmod{P}$.

So werden wir die vorstehenden Gleichungen folgendermaßen schreiben können:

$$\left.\begin{aligned}&\int_\alpha^{x_1,z} + \int_\alpha^{x_2,z} + \dots \int_\alpha^{x_{2p-2},z} \equiv K_\alpha \pmod{P}\\ \text{bez. } &\int_\alpha^{x_1,z} + \int_\alpha^{x_2,z} + \dots \int_\alpha^{x_{4p-4},z} \equiv 2K_\alpha \pmod{P}\end{aligned}\right\}\alpha = 1,2 \dots p,$$

und dies sind die Formeln, von denen wir jetzt immer zu Gebrauch machen wollen, indem wir uns zu unserem eigentlichen Gegenstande, der allgemeinen Theorie der Berührungsflächen wenden.

Unter einer Berührungsfläche μ^{ter} Ordnung verstehen wir eine solche f_μ, welche unsere C_{2p-2} überall, wo sie dieselbe trifft, berührt, im Ganzen also in $\mu(p-1)$ Punkten berührt. Wir bezeichnen dieselbe allgemein mit F_μ (sowie wir insbesondere eine überall berührende Ebene mit Φ bezeichnet hatten). In die Existenz und die Gruppirung dieser F_μ wird uns die Theorie der Abel'schen Functionen einen eigenartigen Einblick gewähren. Und zwar wird sich dieselbe, was $\mu > 1$ angeht, vollständig mit den wenigen Sätzen ermöglichen, die wir aus der Theorie der Abel'schen Functionen entwickelt haben; nur wenn wir $\mu = 1$ discutiren wollen, müssen wir daneben noch das Hülfsmittel der ϑ heranziehen. Wir bemerken auch gleich, dass wir da leicht noch eine Verallgemeinerung eintreten lassen können, indem wir statt der Berührungsflächen Osculationsflächen, Hyperosculationsflächen etc. setzen. Wir werden weiter unten auch hierauf genauer eingehen. Der ganze Ansatz ist einfach dieser. Sollen $x_1, x_2, \ldots x_{\mu(p-1)}$ die Punkte sein, in denen eine F_μ berührt, so werden die Gleichungen bestehen müssen

$$2\left(\int_\alpha^{x_1, z} + \int_\alpha^{x_2, z} + \cdots \int_\alpha^{x_{\mu(p-1)}, z}\right) \equiv \mu K_\alpha \pmod{P}.$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots p).$$

Wir dividiren diese Congruenzen durch 2. Dann

entsteht, wenn wir unter ϱ_β, ϱ'_β ganze Zahlen verstehen wollen, die nach Belieben gleich Null oder Eins genommen werden können:

$$\int_\alpha^{x_1,z} + \int_\alpha^{x_2,z} + \dots \int_\alpha^{x_{\mu(p-1)},z} \equiv \frac{\mu K_\alpha}{2} + \sum_1^p \varrho_\beta \frac{P_{\alpha\beta}}{2} + \sum_1^p \varrho'_\beta \frac{P'_{\alpha\beta}}{2},$$

unter den $P_{\alpha\beta}$, $P'_{\alpha\beta}$ die Perioden 1ter und 2ter Art der Integrale $\int_\alpha$ verstanden. Dies sind, bei der Beliebigkeit der ϱ, ϱ', im Ganzen 2^{2p} Gleichungssysteme, welche ebensoviele Umkehrprobleme vorstellen. Die Theorie dieser Umkehrprobleme ist ohne weiteres, in geometrische Sprache übersetzt, die Theorie der Berührungsflächen F_μ.

Da liegt nun in der Tat, sofern wir $\mu = 1$ nehmen, eine Schwierigkeit vor, die für $\mu > 1$ nicht mehr besteht. Bei $\mu = 1$ haben wir Umkehrprobleme mit $p - 1$, d.h. mit weniger als p unbekannten Punkten. Ein solches Umkehrproblem kann nach dem früheren nur lösbar sein, wenn die rechter Hand stehenden Größen eine bestimmte Bedingung erfüllen. Aber wir kennen diese Bedingung einstweilen nicht und können außerdem nicht beurteilen, wie es mit dem Befriedigtsein dieser Bedingung durch die bei unseren Gleichungen auf der rechten Seite stehenden Größen steht. Es bleibt da zunächst nichts anderes übrig, als daß wir den Gedankengang umkehren und sagen:

Wir wissen anderweitig, dass es bei unserer C_{2p-2} $2^{p-1}(2^p-1)$ überall berührende φ giebt, im speciellen Falle kann es auch unendlich viele φ geben.

Daher schliessen wir, dass von den hier zur Discussion stehenden 2^{2p} speciellen Umkehrproblemen im Allgemeinen gerade $2^{p-1}(2^p-1)$ eine Lösung und zwar eine völlig bestimmte Lösung gestatten, während es in den speciellen Fällen so sein kann, dass eine dieser Lösungen unbestimmt wird oder auch dass eines der $2^{p-1}(2^p+1)$ im Allgemeinen auszuschliessenden Umkehrprobleme Lösungen gewinnt. Genaueres hierüber wird aber, wie schon angedeutet, nur erst die Theorie der Thetafunctionen geben können.

[Di. 12.7.92.] Man wird vielleicht fragen, welches die Characteristiken $\varrho_\beta, \varrho_\beta'$ sein mögen, welche zu den $2^{p-1}(2^p-1)$, lösbaren Umkehrproblemen gehören? Hierauf ist zu antworten, dass dies überhaupt keine bestimmten Grössen sind. In der Tat, die K_α, welche in unseren Gleichungen figuriren, sind nur auf Multipla der Perioden P, P' bestimmt, die K_α also nur bis auf Multipla der Periodenhälften; ich kann also die Definition der $K_\alpha/_2$ so wählen, dass zu irgendwelcher φ, die ich herausgreife, ein

ganz beliebiges System von ϱ_β, ϱ'_β gehört. Was bestimmt ist, sind einzig die Differenzen der ϱ_β, ϱ'_β und $\bar\varrho_\beta$, $\bar\varrho'_\beta$, die zu irgend zwei herausgegriffenen Φ, $\bar\Phi$ gehören. In der Tat wird man ja für die bez. Berührungspunkte die Gleichungen bilden:

$$j_\alpha^{x_1,\bar x_1} + j_\alpha^{x_2,\bar x_2} + \cdots\cdots j_\alpha^{x_{p-1},\bar x_{p-1}} \equiv \sum(\varrho_\beta-\bar\varrho_\beta)\frac{i_{\alpha\beta}}{2} + \sum(\varrho'_\beta-\bar\varrho'_\beta)\frac{\tau'_{\alpha\beta}}{2},$$

aus denen die K_α ganz herausgefallen sind. Wir werden das so aussprechen. Vermöge unseres bisherigen Ansatzes erhalten die Φ keine absoluten, sondern nur relative Charakteristiken. Es soll damit zugleich offen gelassen sein, dass wir später vermöge eines weitergehenden Ansatzes, nämlich vermöge der Theorie der Thetafunktionen, den Φ in der Tat absolute Charakteristiken beilegen werden. – Wir wenden uns jetzt zu den Φ_μ mit $\mu \geqq 2$.

Da wird die ganze Sache darum zunächst viel einfacher, weil die sämmtlichen 2^{2p} Umkehrprobleme:

$$j_\alpha^{x_1,z'} + \cdots j_\alpha^{x_{\mu(p-1)},z} \equiv \frac{\mu K_\alpha}{2} + \sum \varrho_\beta \frac{\bar\tau_{\alpha\beta}}{2} + \sum \varrho'_\beta \frac{\bar\tau_{\alpha\beta}}{2}$$

hier zweifellos Lösungen haben. Es giebt 2^{2p} unterschiedene Systeme von Berührungsflächen Φ_μ. Zugleich können wir sagen, wie viel mal unendlich diese Flächensysteme sind. Ist $\mu > 2$, so ist die Zahl der

Bei ungeradem μ ist die Sache natürlich allgemein so, wie bei dem besonderen Falle $\mu = 1$; wir werden zunächst nur von relativen Charakteristiken der bez. F_μ sprechen dürfen. Bei geradem μ wird allgemein dasjenige F_μ unsere besondere Aufmerksamkeit auf sich lenken, dessen sämmtliche g_ρ, g'_ρ verschwinden, (dessen Elementarcharakteristik also, um einmal die sonst übliche Schreibweise anzuwenden, $=\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ ist). Wir haben da die Gleichungen: $\int^{x_1,z} + \cdots \int^{x_{\mu(p-1)},z} = \mu \frac{k_\alpha}{2}$,
die wir natürlich auch so schreiben können:

$$\int_\alpha^{x_1,z'} + \cdots \int_\alpha^{x_{\frac{\mu}{2}(2p-2)},z} = \frac{\mu}{2} \cdot k_\alpha .$$

Es sind das aber genau dieselben Gleichungen, welche besagen, daß die $\frac{\mu}{2}(2p-2)$ Punkte x das volle Schnittpunktsystem unserer Curve mit einer $f_{\frac{\mu}{2}}$ bilden. Daher: *Die F_μ des in Rede stehenden ausgezeichneten Systems werden von den doppeltzählenden $f_{\mu/2}$ gebildet.*

Einen Satz, der für alle Berührungssysteme gleichförmig gilt, erhält man, wenn man die Gleichungen, die zu zwei Flächen F_μ, F'_μ desselben Systems gehören, zusammenaddirt. Es kommt dann:

$$\int_\alpha^{x_1,z} + \cdots \int_\alpha^{x_{\mu(p-1)},z} + \int_\alpha^{x'_1,z} + \cdots \int_\alpha^{x'_{\mu(p-1)},z} = \mu K_\alpha .$$

Das heisst: *Die Berührungspunkte irgend zweier F_μ desselben Systems bilden den vollen Schnitt unserer Curve mit*

gesuchten Berührungspunkte x größer als $2p-2$ und demnach das Zusatzglied σ des Riemann-Roch'schen Satzes gewiß Null. Ist $\mu = 2$, so ist die Zahl der Punkte $2p-2$. Aber es giebt nur eine einzige Schaar von Specialgruppen zu $2p-2$ Punkten, das ist diejenige, die von den Ebenen des R_{p-1} ausgeschnitten wird. Bei ihr sind unsere Integralsummen $= K$, das Ergänzungsglied des Riemann-Roch'schen Satzes gleich 1.

Fassen wir zusammen, so kommt:

Unsere Systeme von Berührungsflächen F_μ sind alle $[\mu(p-1)-p]$ fach unendlich, nur das eine bei $\mu = 2$ auftretende System, welches den Werten $\varrho_\beta = 0$, $\varrho_\beta' = 0$ entspricht, ist nicht $(p-2)$-fach sondern $(p-1)$fach unendlich.

In dem so formulirten Satze liegt bereits drin, daß bei geradem μ die „Charakteristiken“ $\varrho_\beta, \varrho_\beta'$ absolute Bedeutung haben. In der Tat werden ja bei geradem μ die Größen $\frac{\mu K_\alpha}{2}$ bis auf Multipla ganzer Perioden definirt sein. Die F_μ haben da also absolute Charakteristiken (die wir Elementarcharakteristiken nennen, im Gegensatze zu den absoluten Charakteristiken bei ungeradem μ, die wir erst später einführen).

einer f_μ. Umgekehrt werden wir auch gleich sagen können: Legen wir durch die Berührungspunkte x einer F_μ irgend eine f_μ, so schneidet dieselbe in weiteren $\mu(p-1)$ Punkten x', welche ihrerseits die Berührungspunkte einer F_μ desselben Systems sind.

Allgemeiner werden wir solche Berührungsflächen combiniren, deren Grad sich um eine gerade Zahl unterscheidet, also bez. μ und $(\mu + 2\ )$ ist. Wir werden solche Systeme von F_μ und $F_{\mu+2}$ correspondirend nennen, welche dieselben ρ_i, ρ'_i besitzen. Nun addiren wir die Gleichungen, welche sich auf irgend zwei F_μ und $F_{\mu+2}$ aus correspondirenden Systemen beziehen, zusammen und schliessen daraus, dass die $(\mu+\nu)(2p-2)$ Berührungspunkte, welche die beiden Flächen zusammengenommen aufweisen, den vollen Schnitt unserer Curve mit einer $f_{\mu+\nu}$ ausmachen, etc. etc.

Ein besonders wichtiger Fall der hiermit angedeuteten Entwickelung entsteht, wenn wir $\mu = 1$ nehmen, wo dann nur für $2^{2p-1}(2^p-1)$ der Umkehrprobleme zugehörige F_1, d. h. Φ existiren. Wir werden schliessen, dass die 2^{2p} Systeme von F_μ, die es giebt, bei ungeradem μ in zwei Classen zerfallen: in $2^{p-1}(2^p-1)$ Systeme, welche einzeln den Φ „correspondiren", und in $2^{p-1}(2^p-1)$ welche für sich stehen. Wir brauchen durch die Berüh-

rungspunkte einer φ nur irgend welche $f_{1+\nu}$ zu legen, um in deren weiteren Schnittpunkten mit der Curve solche Punkte zu haben (und zwar die allgemeinsten solchen Punkte), in denen eine $F_{1+2\nu}$ des correspondirenden Systems berührt, etc. etc. *)

Man sieht, mit welcher Leichtigkeit hier eine volle Theorie der F_μ und der Gruppirungen, welche dieselben unter sich zeigen, entwickelt werden kann. Es ist nützlich, alle hier entstehenden Sätze einmal für $p = 3, 4$ zu specificiren, um zu sehen wie ausserordentlich viel damit in geometrischer Hinsicht gewonnen ist. Und dass dies Alles mit einem Schlag in voller Allgemeinheit gewonnen ist, das eben ist die grosse Leistung, welche uns hier die Abel'schen Functionen an die Hand geben. Dabei liegen weitere Verallgemeinerungen nahe. Ich will nur zweierlei bez. Ansätze angeben:

1). Statt Berührungsflächen F_μ zu betrachten, [Mo. 18/7. 92] werden wir Osculationsflächen, Hyperosculationsflächen etc. in Untersuchung ziehen können, d. h. solche.

*) Übrigens wird für die F_μ ungerader Ordnung dasselbe gelten, was wir soeben insbesondere für φ entwickelten: dass wir einstweilen noch nicht in der Lage sind, absolute Charakteristiken derselben festzulegen, sondern nur erst relative Charakteristiken. Denn die Grössen $\mu \frac{k\alpha}{2}$ sind bei beliebigem ungeradem μ nur bis auf halbe Perioden bekannt.

f_μ, welche die Curve überall, wo sie dieselbe treffen, osculiren, hyperosculiren etc. Da wird es sich denn um Umkehrprobleme handeln, in denen die Dritteile, Vierteile der Perioden genau dieselbe Rolle spielen, wie vorhin die Hälften. Und die Zahl der zu unterscheidenden coordinirten Umkehrprobleme wird 3^{2p}, 4^{2p} etc. betragen.

2). Statt der Normalcurve C_{2p-2} der φ mögen wir irgend welche andere Curve C_m des R_r zu Grunde legen und fragen, wann wir bei ihr eine analoge Theorie der Berührungsflächen etc. entwerfen können.

Darauf ist ganz einfach zu antworten: Die notwendige und hinreichende Bedingung ist die, daß die f_μ, welche man betrachtet, in ihrer Gesamtheit auf der Curve gerade eine Vollschaar aequivalenter Punktgruppen ausschneiden. Dabei erinnere man sich, daß dies nach Nöther und Hilbert bei jeder doppelpunktlosen C_m für alle hinreichend großen μ der Fall ist. Bei C_m mit Dp. wird man „adjungirte" f_μ in Betracht ziehen müssen. Anderenfalls hat man bei ihnen, was ich nicht ausführe, neben den Integralen erster Gattung noch diejenigen Integrale dritter Gattung in Betracht zu ziehen, deren Unstetigkeitsstellen in den Doppel-

punkten liegen (Clebsch-Gordan's „erweitertes Umkehrproblem"; vergl. die Auffassung von pag. 110, 111, der Winterautographie).

B. Von den Thetafunctionen.

Indem ich mich anschicke, nun Einiges über Thetafunctionen anzugeben, muss ich mich noch mehr auf ein blosses Referat beschränken als vorhin. Ich will vorweg angeben, dass für die Sätze, welche ich entwickele, Riemann's zwei hierher gehörige Arbeiten die Hauptquelle sind („Theorie der Abel'schen Functionen" [Teil II], 1857; „Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen", 1865); an sie reiht sich dann Weber's oft genannte Untersuchung über die Ausnahmefälle der Abel'schen Functionen in Ann. 13 (1870); auch möge man als Einleitung in die hier vorliegenden Fragestellungen Weber's Schrift über Abel'sche Functionen vom Geschlechte drei benutzen (1876).

1. Definition der 2^{2p} Thetafunctionen.

Die Thetafunction, wie wir sie hier betrachten:

$$\vartheta\begin{vmatrix} g_1 \cdots\cdots g_p \\ h_1 \cdots\cdots h_p \end{vmatrix}(j_1 \cdots\cdots j_p;\ \tau_{11} \cdots\cdots \tau_{pp})$$

hängt ab:

erstens von dem Index $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$, den man die Characteristik nennt. Die $2p$ in demselben auftretenden ganzen Zahlen g, h können jede die Werthe 0 oder 1 bekommen;

zweitens von den p „Variabelen" $j_1 \cdots j_p$; es sind dies unbeschränkt veränderliche Grössen;

drittens von den $\frac{p\cdot p+1}{2}$ „Parametern" $\tau_{\alpha\beta}$, (wo $\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha}$).
Sei mit Unterscheidung des reellen und imaginären Teiles $\tau_{\alpha\beta}=\tau'_{\alpha\beta}+i\tau''_{\alpha\beta}$. So unterwirft man die $\tau_{\alpha\beta}$, so oft von einer Thetafunction die Rede sein soll, eben der Beschränkung, die uns von den $\tau_{\alpha\beta}$ der Riemann'schen Flächen her bekannt ist; wir verlangen, daß die quadratische Form der Variabelen $n_1 \dots n_p$: $\sum \tau'_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$ positiv definit sein soll. Uebrigens sind die „Parameter" $\tau_{\alpha\beta}$ ebensowohl als veränderlich zu denken, wie die „Variabelen" j_α, und es erhält die Theorie der Thetafunctionen erst ihre rechte Beleuchtung, wenn man bald die j_α, bald die $\tau_{\alpha\beta}$ als die eigentlichen Veränderlichen voranstellt.

Die weitere Definition der ϑ sollte nun, wenn wir den Grundgedanken der Riemann'schen Functionentheorie festhalten wollten, durch Angabe ihrer wesentlichen Eigenschaften geschehen; von der so gewonnenen Definition aus müßten dann u. A. die verschiedenen analytischen Darstellungen, welche man für die Thetafunctionen besitzt, erst abgeleitet werden. Indessen werden wir hier genau so von den Forderungen des Riemann'schen Programm's abweichen, wie dies Riemann selbst bei dieser Frage (in seiner „Theorie der Abel'schen Functionen") tut: wir werden einfach die Definition der ϑ durch die bekannte Exponentialreihe voranstellen und an sie diejenigen Eigenschaften der ϑ, die wir hier zu benutzen haben, kurz anknüpfen. Die in Rede stehende Function ist folgende:

$$\vartheta_{\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]}(v_\alpha ; \tau_{\alpha\beta}) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \cdots\cdots \sum_{n_p=-\infty}^{+\infty} E_{n_1 \cdots\cdots\cdots n_p},$$

$$E_{n_1 \cdots n_p} = e^{i\pi\left(\sum_1^p \sum_1^p \tau_{\alpha\beta}\left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta + \frac{g_\beta}{2}\right) + 2\sum_1^p \left(v_\alpha + \frac{h_\alpha}{2}\right)\left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\right)}$$

Die Convergenz dieser Reihe ist gerade an die Ungleichung für die $\tau_{\alpha\beta}$ gebunden, welche wir diesen Größen ohnehin auferlegten. Wählen wir die $\tau_{\alpha\beta}$ insbesondere als die Perioden der Normalintegrale erster Gattung irgend welcher vorgegebenen, kanonisch zerschnittenen Riemann'schen Fläche, so bezeichnen wir die entstehende ϑ-Function insbesondere als Riemann'sches Theta.

2. Functionaleigenschaften der ϑ.

Wir wollen hier nur solche Functionaleigenschaften der ϑ zur Sprache bringen, welche sich auf die Variabelen v_α beziehen. Wir haben da:

a. Die ϑ erscheinen (vermöge der den $\tau_{\alpha\beta}$ auferlegten Ungleichung) als transcendente ganze Functionen der v_α.

b. kehrt man alle v_α im Vorzeichen um, so erhält $\vartheta_{\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]}$ den Factor:

$$(-1)^{g_1 h_1 + g_2 h_2 + \cdots\cdots g_p h_p}.$$

Die Thetafunction ist also in Abhängigkeit von den v_α gerade oder ungerade, und zwar jenachdem die Summe $g_1 h_1 + \cdots g_p h_p$ es ist. Von hier aus findet man, daß sich die 2^{2p} Thetafunctionen auf

$2^{p-1}(2^p+1)$ gerade und
$2^{p-1}(2^p-1)$ ungerade

verteilen.

c. Als „Perioden“ der j_α betrachten wir eben die Größen, die uns von den Riemann'schen Flächen her bekannt sind:

	Perioden 1ter Art	Perioden 2ter Art
j_1	$1 \; 0 \; 0 \ldots\ldots 0$	$\tau_{11} \ldots\ldots\ldots \tau_{1p}$
$\vdots$	$\vdots \; \vdots \; \vdots$	$\vdots \qquad \vdots$
j_p	$0 \; 0 \; 0 \ldots\ldots 1$	$\tau_{p1} \ldots\ldots\ldots \tau_{pp}$

d. Vermehrt man die j_α um die k^{te} Periode erster Art, so erhält das einzelne ϑ den Faktor

$$(-1)^{g_k}$$

e. Vermehrt man die j_α um die k^{te} Periode zweiter Art, so erhält das einzelne ϑ den Faktor

$$(-1)^{h_k} e^{-2i\pi\left(j_k + \frac{\tau_{kk}}{2}\right)}$$

[Di. 19.7.92] 3). Von der Potenzentwickelung der ϑ.

Als Funktion der j_α läßt sich $\vartheta\left|\frac{g}{h}\right|$ vermöge des Maclaurin'schen Satzes in eine nach steigenden Potenzen der j_α fortschreitende Reihe verwandeln, die beim ungeraden ϑ selbstverständlich die Form hat:

$$\vartheta\left|\frac{g}{h}\right| = (j_1 \cdots j_p)_1 + (j_1 \cdots j_p)_3 + (j_1 \cdots j_p)_5 + \cdots\cdots,$$

beim geraden ϑ aber die andere:

$$\vartheta\left|\frac{g}{h}\right| = (j_1 \cdots j_p)_0 + (j_1 \cdots j_p)_2 + \cdots\cdots,$$

ich habe dabei die Glieder gleicher Dimension je in eine Klammer zusammengefaßt. Da wird man nun in jedem Falle

darauf zu achten haben, ob vielleicht einige Anfangsglieder der Potenzentwickelung ausfallen mögen. Dies ist im Allgemeinen keineswegs der Fall: im Allgemeinen beginnen die ungeraden Entwickelungen wirklich mit den Gliedern 1ter Ordnung, die geraden Entwickelungen mit einem Glied nullten Grades. Aber es giebt besondere Fälle, wo dies anders ist, und um diese bei den folgenden Angaben mit berücksichtigen zu können, wollen wir verabreden, dass die niedersten nicht identisch verschwindenden Glieder der Entwickelung diejenigen vom ϱ^{ten} Grade sein mögen: ϱ ist dabei im ungeraden Falle selbst ungerade, im geraden Falle gerade.

Das einfachste Beispiel dieser besonderen Fälle liefert wieder das hyperelliptische Gebilde. Bei ihm liegt die Sache folgendermassen. Sei f_{2p+2} diejenige rationale ganze Form $(2p-2)^{\text{ten}}$ Grades von z_1, z_2, welche gleich Null gesetzt, die $(2p+2)$ Verzweigungspunkte der hyperelliptischen zweiblättrigen Fläche liefert. Da zeigt sich nun, dass jedes ϑ einer bestimmten Zerspaltung des f in zwei Factoren φ, ψ zugeordnet ist, deren Grad sich nur um ein Multiplum von 4 unterscheidet. Und schreiben wir insbesondere:

$$f_{2p-2} = \varphi_{p+1-\varrho} \cdot \psi_{p+1+\varrho}, \quad \ldots\ldots$$

so ist das zugehörige ϑ gerade ein solches, dessen Reihenentwickelung mit den Gliedern ϱ^{ter} Ordnung beginnt!

Der Sinn dieser Angabe wird am besten klar werden,

wenn wir die niedersten Werte von p einzeln discutiren:

$\underline{p=2}.\ f_6.\ \rho=0$. Zehn Spaltungen $f_6=\varphi_3\cdot\psi_3$ — 10 gerade ϑ ohne Besonderheit

$\rho=1$ Sechs Spaltungen $f_6=\varphi_1\cdot\psi_5$ — 6 ungerade ϑ, dito

16 ϑ im Ganzen.

$\underline{p=3}.\ f_8.$ $\rho=0$	35	Spaltungen	$\varphi_4\cdot\psi_4$	35 gewöhnl. gerade ϑ
$\rho=1$	28	"	$\varphi_2\cdot\psi_6$	28 " ungerade ϑ
$\rho=2$	1	"	$\varphi_0\cdot\psi_8$	1 gerades ϑ, dessen Nullwert verschwindet.
				64 ϑ im Ganzen.
$\underline{p=4}.\ f_{10}$ $\rho=0$	126	Spaltungen	$\varphi_5\cdot\psi_5$	126 gerade ϑ
$\rho=1$	120	"	$\varphi_3\cdot\psi_7$	120 ungerade ϑ
$\rho=2$	10	"	$\varphi_1\cdot\psi_9$	10 gerade ϑ mit verschwindendem Nullwert
				256 ϑ im Ganzen
$\underline{p=5}$ $\rho=0$	462	Spaltungen	$\varphi_6\cdot\psi_6$	462 gerade ϑ
$\rho=1$	495	"	$\varphi_4\cdot\psi_8$	495 ungerade ϑ
$\rho=2$	66	"	$\varphi_2\cdot\psi_{10}$	66 gerade ϑ mit verschwindendem Nullwert
$\rho=3$	1	"	$\varphi_0\cdot\psi_{12}$	1 ungerades ϑ, dessen Entwickelung erst mit den Gliedern 3ter Ordnung beginnt
				1024 ϑ im Ganzen.

4). Beziehungen der besprochenen Potenzentwickelung

<u>zur Theorie der Φ.</u>

Die besprochenen Potenzentwickelungen stehen nun in engster Beziehung zur Theorie der Φ. Unter Beiseitelassung aller Zwischenangaben behaupte ich: <u>Jedes ϑ, dessen Entwickelung erst mit den Gliedern ϱ^{ter} Ordnung beginnt, liefert eine $(\varrho-1)$ fach unendliche Schaar von Φ, und andere Φ, als diejenigen, welche solcherweise dem einzelnen ϑ zugeordnet sind, giebt es nicht.</u>

Dies soll ein ganz allgemeiner Satz sein, welcher alle speciellen Fälle umfasst. Im Allgemeinen wird es ja keine anderen Werte von ϱ geben, als $\varrho = 0$ [für die geraden ϑ] und $\varrho = 1$ [für die ungeraden ϑ]. Da wird denn unser Satz in Uebereinstimmung mit unseren früheren Angaben behaupten, dass den $2^{p-1}(2^p+1)$ geraden ϑ im Allgemeinen <u>keine</u> Φ zugehörigen, jeder einzelnen der $2^{p-1}(2^p-1)$ ungeraden Functionen aber eine endliche Zahl von Φ, nämlich eine einzige. In den aufgezählten hyperelliptischen Fällen aber wird sich die Sache so gestalten:

Bei $p = 2$ gilt die allgemeine Theorie.

Bei $p = 3$ gibt es einmal den 28 ungeraden ϑ entsprechend 28 isolirte Φ, dann aber dem einen ausgezeichneten geraden ϑ entsprechend eine einfach unendliche Schaar.

Bei $p = 4$ haben wir 120 isolirte Φ und dann noch 10 einfach unendliche Schaaren.

Bei $p=5$ endlich 495 isolirte ϕ, 66 einfach unendliche Schaaren, eine zweifach unendliche Schaar. —

Die hiermit über die hyperelliptischen Fälle gemachten Angaben werden wir übrigens leicht bestätigen, wenn wir den ganz elementaren Ansatz machen: Ein Integral erster Gattung beim hyperelliptischen Gebilde stellt sich in der Form dar:

$$w = \int \frac{\varphi_{p-1}(z_1, z_2)\cdot(z\,dz)}{\sqrt{f_{2p+2}(z_1, z_2)}},$$

die „hyperelliptischen φ" sind also den ganzen rationalen Formen $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades von z_1, z_2 proportional zu setzen. Eine solche Form liefert auf der z-Ebene $p-1$ Nullstellen und damit auf der über der z-Ebene ausgebreiteten hyperelliptischen Fläche $2p-2$ Nullstellen, wie es sein muss. Wann nun werden diese $2p-2$ Nullstellen auf der Fläche paarweise zusammenfallen und sich das φ also in ein ϕ verwandeln? Da bietet sich offenbar die doppelte Möglichkeit, dass entweder die einzelne Nullstelle der z-Ebene mit einem Verzweigungspunkte der hyperelliptischen Fläche zusammenfällt, oder dass zwei Nullstellen in der z-Ebene selbst zusammenrücken. Wir haben dementsprechend den Ansatz:

$$\phi = \varphi_{p+1-2\varrho}\cdot(X_{\varrho-1})^2, \quad (\varrho \geqq 1),$$

unter $\varphi_{p+1-2\varrho}$ einen Factor $(p+1-2\varrho)^{\text{ten}}$ Grades von f_{2p+2}, unter $X_{\varrho-1}$ eine beliebige rationale ganze Form $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades

von z_1, z_2 verstanden. Indem wir nun aus f_{2p+2} alle möglichen Faktoren herausheben, erhalten wir für $p = 2, 3, 4, 5, \ldots$ genau dieselbe Aufzählung der existirenden ϕ, welche wir soeben von unserem allgemeinen auf die ϑ-Functionen bezüglichen Satze aus gemacht haben.

Es liegt mir daran, diese Angaben über die ϕ der hyper- [Di. 26.7.92] elliptischen Gebilde doch auch noch geometrisch, unter Zugrundelegung der Normalcurve der φ auszusprechen, damit nämlich völlig deutlich sei, wie sich hier der hyperelliptische Fall als Specialfall in den allgemeinen einordnet. Offenbar wird das durch die vorstehende Formel gegebene ϕ gleich Null gesetzt eine „Ebene" vorstellen, welche die Normalcurve der φ einerseits in $(p+1-2\varrho)$ der $2p+2$ auf der Curve befindlichen Scheitel schneidet, andererseits in $\varrho - 1$ beliebig zu wählenden Punkten berührt. Dementsprechend werden wir (um wieder bei den niederen Fällen zu bleiben) bei $p = 3, 4, 5$ folgende Verhältnisse haben:

<u>Bei $p = 3$</u> haben wir einen doppeltzählenden Kegelschnitt mit 8 Scheiteln. Es giebt erstlich 28 einzelne ϕ, den 28 ungeraden ϑ entsprechend, das sind die 28 Verbindungsgeraden der 8 Scheitel. Dann eine Schaar von ∞^1 ϕ, entsprechend dem einen geraden ϑ mit $\varrho = 2$: die sämmtlichen Tangenten des doppeltzählenden Kegelschnittes.

<u>Bei $p = 4$</u> haben wir doppeltzählende Raumcurve 3. Ordnung mit 10 Scheiteln. Als ϕ haben wir anzusehen: erstens die 120

Ebenen, welche durch 3 der 10 Scheitel hindurchgehen; dieselben entsprechen den 120 geraden ϑ: zweitens die sämmtlichen Tangentialebenen der 10 Kegel zweiten Grades, durch welche die Raumcurve dritter Ordnung von den 10 Scheiteln aus projicirt wird; dieselben entsprechen den 10 geraden ϑ mit $\varrho = 2$

Bei $p = 5$ haben wir doppeltzählende C_4 des R_4 mit 12 Scheiteln. Da giebt es an φ:

den gewöhnlichen ungeraden ϑ $(\varrho = 1)$ entsprechend 495 Ebenen durch 4 Scheitel;

den geraden ϑ mit $\varrho = 2$ entsprechend 66 Schaaren von Ebenen, welche durch 2 der 12 Scheitel hindurchgehen und übrigens die C_4 berühren; dem

ausgezeichneten ungeraden ϑ, welches $\varrho = 3$ besitzt, entsprechend: die doppelt unendliche Schaar derjenigen Ebenen, welche die C_4 doppelt berühren.

Wir erkennen hier, warum wir früher den hyperelliptischen Fall bei $p = 3, 4$ noch anstandslos haben gebrauchen können, dagegen bei $p = 5$ eine Schwierigkeit fanden: ausgehend von der allgemeinen Discussion der φ achteten wir nur auf solche φ, welche ungeraden ϑ entsprechen, und für diese beginnt ja das Unbestimmtwerden erst bei $p = 5$.

5. Genauer Nachweis der besprochenen Beziehungen.

Wir haben bislang das Entsprechen zwischen den φ und den für die ϑ geltenden Potenzentwickelungen nur erst im

Allgemeinen behauptet; ich werde jetzt die Art des Entsprechens noch genauer festlegen. Man ersetze die $j_1 \dots j_p$ im ϑ durch Differentiale $dj_1 \dots\dots dj_p$: So wird ϑ in erster Annäherung durch das erste Glied einer Potenzentwickelung gegeben sein:

$$\vartheta = (dj_1 \dots\dots dj_p)_\varrho .$$

Hier nun betrachte man dj_α als das Differential des α^{ten} zu unserer Riemann'schen Fläche gehörigen Normalintegrals und schreibe dementsprechend $dj_\alpha = \varphi_\alpha\, dw$.

So haben wir $\vartheta = (\varphi_1, \dots \varphi_p)_\varrho\, dw^\varrho$.

Jetzt betrachten wir die Gleichung

$$(\varphi_1, \dots\dots\dots \varphi_p)_\varrho = 0 .$$

Dieselbe stellt eine „Fläche ϱ^{ter} Ordnung" in unserem Raume der φ dar. Und nun behaupte ich: <u>daß diese Fläche gerade $(\varrho - 1)$ fach unendlich viele Tangentenebenen hat,</u> *) <u>und daß diese $(\varrho - 1)$ fach unendlich vielen Tangentenebenen gerade die Φ sind, welche dem gewählten ϑ correspondiren.</u>

Also, um zunächst von dem allgemeinen Falle zu sprechen, wo alle geraden ϱ gleich 0 sind, alle ungeraden ϱ gleich 1:

<u>Nur die ungeraden ϑ liefern hier die Φ, jede ein einziges, nämlich durch die Glieder erster Ordnung $(\varphi_1 \dots \varphi_p)_1 = 0$ oder, ausführlicher geschrieben:</u>

---

*) Solange also $\varrho < p$, ist unsere Fläche eine „developpable Fläche" des R_{p-1}, man könnte sagen: von der $(p - \varrho)^{ten}$ „Stufe".

$$\left(\frac{d\vartheta}{dj_1}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_1+\left(\frac{d\vartheta}{dj_2}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_2+\cdots\cdots\left(\frac{d\vartheta}{dj_p}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_p=0.$$

Haben wir erst einmal für irgendwelche kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche T_{2p} numerisch berechnet und beherrschen die zugehörige ϑ, so haben wir zugleich die Gleichung $2^{p-1}(2^p-1)^{\text{ten}}$ Grades, von der die Bestimmung der zugehörigen Φ abhängt, vollständig aufgelöst.

Dann aber, um einen höheren Fall in Betracht zu ziehen: Wir wollen annehmen, es sei $p=4$ und für eines der zugehörigen geraden $\vartheta_g = 0$. Wir erhalten dann in der Gleichung:

$$\left(\frac{d^2\vartheta}{dj_1^2}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_1^2+2\left(\frac{d^2\vartheta}{dj_1\,dj_2}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_1\varphi_2+\cdots\cdots=0$$

einen Kegel zweiten Grades des R_3, dessen sämmtliche Tangentialebenen Φ für die in Betracht kommende C_6 sind.

Es ist dies offenbar der Fall, wo die F_2, welche die C_6 trägt, in einen Kegel, – eben den Kegel dessen Gleichung wir hingeschrieben haben, ausartet. In der Tat ist jedenfalls dieses von vornherein klar, dass die C_6, welche der Schnitt eines solchen Kegels mit einer f_3 ist, die sämtlichen Tangentialebenen des Kegels zu dreimal berührenden Ebenen, d.h. zu Φ besitzt.

[Fr. 22.7.92]

6. Fortschritte, die hiermit in der Theorie der Φ erzielt sind.

Wir werden erstlich folgendermassen sagen dürfen: Zur Bestimmung der Φ hatten wir die 2^{2p} Umkehrprobleme:

$$\int_\alpha^{x_1, z} + \int_\alpha^{x_2, z} + \ldots\ldots \int_\alpha^{x_{p-1} z} = \frac{K_\alpha}{2} + \Sigma \varrho_\beta \frac{T_{\alpha\beta}}{2} + \Sigma \varrho'_\beta \frac{T'_{\alpha\beta}}{2};$$

wir sehen jetzt genau, welche dieser Umkehrprobleme, je nach der Potenzentwickelung der ϑ überhaupt eine Lösung haben, bez. wie vielfach unendlich die Schaar der möglichen Lösungen ist.

Wir werden dann aber fortfahren: In den vorstehenden Gleichungen waren die $\frac{K_\alpha}{2}$ nur erst modulo halber Perioden bestimmt gewesen, und es hatten dementsprechend die „Charakteristiken" $\varrho_\beta, \varrho'_\beta$, die wir dem einzelnen ϕ (bez. der einzelnen Schaar von ϕ) zuordnen, keine absolute, sondern nur eine relative Bedeutung. Jetzt, wo wir von den ϑ ausgehen, werden wir nicht zweifelhaft sein, dass wir den ϕ je diejenigen $\varrho_\beta, \varrho'_\beta$ beilegen müssen, welche zusammengenommen die Charakteristik $\left|\frac{g}{h}\right|$ der zugehörigen ϑ-Function ausmachen: $\varrho_\beta = g_\beta, \varrho'_\beta = h_\beta$. Die Charakteristiken der ϕ werden hiermit absolut fixirt. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir fortan die K_α als Grössen ansehen können, welche modulo ganzer Perioden festgelegt sind.

Uebrigens nennen wir die so gewonnenen absoluten Charakteristiken der ϕ wegen des Zusammenhangs der ϑ-Functionen mit der Primform (den wir oben bei Gelegenheit streiften, und auf den wir hier leider nicht ausführlicher eingehen können) Prim-Charakteristiken.[x)]

x) Dabei entsprechen den früheren ϱ_β jetzt die h_β, den früheren ϱ'_β die g_β.

$$\left(\frac{d\vartheta}{dj_1}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_1+\left(\frac{d\vartheta}{dj_2}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_2+\ldots\ldots\left(\frac{d\vartheta}{dj_p}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_p=0.$$

Haben wir erst einmal für irgendwelche kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche T_{2p} numerisch berechnet und beherrschen die zugehörige ϑ, so haben wir zugleich die Gleichung $2^{p-1}(2^p-1)^{ten}$ Grades, von der die Bestimmung der zugehörigen φ abhängt, vollständig aufgelöst.

Dann aber, um einen höheren Fall in Betracht zu ziehen: Wir wollen annehmen, es sei $p=4$ und für eines der zugehörigen geraden $\vartheta_\varrho=2$. Wir erhalten dann in der Gleichung:

$$\left(\frac{d\vartheta^2}{dj_1^2}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_1^2+2\left(\frac{d\vartheta}{dj_1\,dj_2}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_1\varphi_2+\ldots\ldots\ldots=0$$

einen Kegel zweiten Grades des R_3, dessen sämmtliche Tangentenebenen φ für die in Betracht kommende C_6 sind.

Es ist dies offenbar der Fall, wo die F_2, welche die C_6 trägt, in einen Kegel, – eben den Kegel dessen Gleichung wir hingeschrieben haben, ausartet. In der Tat ist jedenfalls dieses von vornherein klar, daß die C_6, welche der Schnitt eines solchen Kegels mit einer f_3 ist, die sämtlichen Tangentialebenen des Kegels zu dreimal berührenden Ebenen, d.h. zu φ besitzt.

[Fr. 22.7.92]

6. Fortschritte, die hiermit in der Theorie der φ erzielt sind.

Wir werden schließlich folgendermaßen sagen dürfen: Zur Bestimmung der φ hatten wir die 2^{2p} Umkehrprobleme:

$$\int_\alpha^{\check{x}_1, z} + \int_\alpha^{\check{x}_2, z} + \dots \int_\alpha^{\check{x}_{p-1}, z} \equiv \frac{K_\alpha}{2} + \Sigma \rho_\beta \frac{\omega_{\alpha\beta}}{2} + \Sigma \rho'_\beta \frac{\omega'_{\alpha\beta}}{2};$$

wir sehen jetzt genau, welche dieser Umkehrprobleme, je nach der Potenzentwickelung der ϑ überhaupt eine Lösung haben, bez. wie vielfach unendlich die Schaar der möglichen Lösungen ist.

Wir werden dann aber fortfahren: In den vorstehenden Gleichungen waren die $\frac{K_\alpha}{2}$ nur erst modulo halber Perioden bestimmt gewesen, und es hatten dementsprechend die „Charakteristiken" ρ_β, ρ'_β, die wir dem einzelnen φ (bez. der einzelnen Schaar von φ) zuordnen, keine absolute, sondern nur eine relative Bedeutung. Jetzt, wo wir von den ϑ ausgehen, werden wir nicht zweifelhaft sein, dass wir den φ je diejenigen ρ_β, ρ'_β beilegen müssen, welche zusammengenommen die Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|$ der zugehörigen ϑ-Function ausmachen: $\rho'_\beta = g_\beta, \rho_\beta = h_\beta$. Die Charakteristiken der φ werden hiermit absolut fixirt. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir fortan die K_α als Grössen ansehen können, welche modulo ganzer Perioden festgelegt sind.

Uebrigens nennen wir die so gewonnenen absoluten Charakteristiken der φ wegen des Zusammenhangs der ϑ-Functionen mit der Primform (den wir oben bei Gelegenheit streiften, und auf den wir hier leider nicht ausführlicher eingehen können) Prim-Charakteristiken.[x)]

x) Dabei entsprechen den früheren ρ_β jetzt die h_β, den früheren ρ'_β die g_β.

Mit dieser Fixirung der K_α werden dann nach der auf p. 230 zugefügten Bemerkung alle F_μ ungerader Ordnung ebenfalls absolute Charakteristiken erhalten, die wir als ihre Primcharakteristiken bezeichnen (während es bei den F_μ gerader Ordnung bei den früher eingeführten Elementar-Charakteristiken sein Bewenden hat). Durch ihre Primcharakteristiken erscheinen dann die 2^{2p} Systeme von F_μ, die es bei einem beliebigen ungeraden $\mu > 1$ giebt, den 2^{2p} ϑ-Functionen einzeln zugeordnet. Damit ist dann für die Realitätsdiscussion, zu der wir uns jetzt wieder zurückwenden, das Princip gegeben, dass wir die Realität der F_μ gerader Ordnung direct mit der Realität der ϑ-Functionen in Verbindung setzen können. Andererseits wird die Aufgabe entstehen, jedem reellen ϕ oder F_μ ungerader Ordnung, welches wir bei gegebener reeller Curve construiren mögen, diejenige Primcharakteristiken wirklich hinzuzusetzen, welche dasselbe bei Zugrundelegung irgend welcher kanonischen Zerschneidung der zur Curve gehörigen Riemann'schen Fläche erhält. Die entsprechende Aufgabe wird man selbstverständlich auch für die Elementarcharakteristiken der geraden F_μ stellen. So erweitern wir hier die Probleme der Realitätsdiscussion in demselben Maasse, als wir neue Hülfsmittel für ihre Behandlung zur Hand haben.

6. Realitätsdiscussion vom hyperelliptischen Gebilde aus.

Wir kehren hier zunächst noch einmal zur ausschließlichen Betrachtung der Φ und zu derjenigen Methode zurück, welche wir früher die hyperelliptische nannten. Es wird sich darum handeln, für die verschiedenen reellen hyperelliptischen Gebilde, die es giebt, also für die Gebilde mit

0, 2, 4, ... 2p+2 reellen Verzweigungspunkten, die Realität der zugehörigen Φ zu discutiren und von da auf die allgemeinen diasymmetrischen Curven mit

0, 1, 2, ... p Symmetrielinien sowie die orthosymmetrischen Curven mit 1 oder 2, bez. mit (p+1) Symmetrielinien den Schluß zu machen. Der erste Teil dieser Aufgabe hat selbstverständlich gar keine Schwierigkeit, nachdem wir einmal durch die Formel (p. 240):

$$\Phi = \varphi_{p+1-2\varrho} \cdot (X_{\varrho-1})^2 \quad (\varrho \geqq 1)$$

die sämtlichen zum hyperelliptischen Gebilde gehörigen Φ algebraisch festgelegt haben. auch ist die Theorie der Thetafunctionen in keiner Weise nötig gewesen, um diese Formel zu gewinnen. Dagegen brauchen wir die ϑ für den zweiten Teil unserer Aufgabe. Wir erfahren nämlich nur von den ϑ aus, welche von den so gewonnenen unendlich vielen Φ des hyperelliptischen Falles die einzelnen Φ des allgemeinen Falles ergeben mögen.

Die Regel, welche da entsteht, ist freilich so einfach wie möglich. Im allgemeinen Falle werden nur die ungeraden ϑ, und zwar je eine einzige Φ ergeben. Von den vorbezeichneten Φ des hyperelliptischen Falles gehören aber diejenigen zu ungeraden ϑ, welche ungerades ϱ haben.

Daher dann: <u>In unseren diasymmetrischen und orthosymmetrischen Fällen werden, allgemein zu reden, so viele reelle Φ vorhanden sein, als sich aus dem f_{2p+2} des zugehörigen hyperelliptischen Falles reelle $\varphi_{p+1-2\varrho}$ mit ungeradem ϱ heraus heben lassen.</u>

Wenden wir diese Regel auf $p=3, 4$ an, so haben wir nur $\varrho = 1$ in Betracht zu ziehen, und eben hierin werden wir jetzt den tieferen Grund dafür erblicken, daß wir früher bei $p=3, 4$ mit der hyperelliptischen Methode zwecks Abzählung der Φ ohne Weiteres zu Stande kamen. Umsomehr wollen wir hier den niedersten Fall in Betracht ziehen, wo ϱ gleich 3 werden kann, d. h. den Fall $p=5$. Wir haben da in f_{2p+2} eine Form 12ten Grades von z_1, z_2, bei welcher die Spaltungen $\varphi_4 \cdot \psi_8$ (495 mal) und $\varphi_0\, \psi_{12}$ (1. mal) in Betracht kommen. Die Realitätszählung gestaltet sich nun folgendermaßen:

[Mo. 25.7.92]

	Verzweigungspunkte						
Arten der reellen [illegible] Gebilder	0+6·Ī	2+5·Ī	4+4·Ī	6+3·Ī	8+2·Ī	10+1·Ī	12+0·Ī

Reelle $\varphi_4 \cdot \psi_8$	$\frac{6.5}{2}$	$5+\frac{5.4}{2}$	$1+\frac{4.3.4}{2}+\frac{4.3}{2}$	$\frac{6.5}{2}+\frac{6.5.3}{2}+\frac{3.2}{2}$	$\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}+\frac{8.7.2}{2}+1$	$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}+\frac{10.9}{1.2}\cdot 1$	$\frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}$
	15	15	31	63	127	255	495
Reelle $\varphi_{10} \cdot \psi_2$	1	1	1	1	1	1	1
Reelle φ der hyperell. Fälle: zugl. geltend für die diasymmetr. Curven von	16	16	32	64	128	256	496
	0	1	2	3	4	5	–
orthosymmetr. Curven mit	2	–	–	–	–	–	–

reellen Zügen, was mit den früher für diese Fälle gemachten Angaben übereinstimmt.

Aber nicht nur die Realität der φ, sondern überhaupt der F_μ ungerader Ordnung ($\mu > 1$) werden wir hier für die genannten diasymmetrischen bez. orthosymmetrischen Curven ohne weiteres bestimmen. Diese F_μ gehen, wie wir lernten, genau den 2^{2p} ϑ parallel, so daß $2^{p-1}(2^p-1)$ F_μ erster Art, die den ungeraden ϑ entsprechen, und $2^{p-1}(2^p+1)$ F_μ zweiter Art, die den geraden ϑ entsprechen, zu unterscheiden sind. Die Realität der F_μ erster Art ist natürlich dieselbe wie die der φ und wird also durch die vorstehende Tabelle mitgeliefert.

Für die F_μ zweiter Art wird man gleicherweise die Zerspaltungen von f_{12} in $\varphi_6 \cdot \psi_6$ sowie in $\varphi_2 \cdot \psi_{10}$ in Betracht

zu ziehen haben.
Dann haben wir zunächst

Verzweigungspunkte

	0+6·I	2+5·I	4+4·I	6+3·I	8+2·I	10+4·I	12+0·I
Reelle Factoren 6ten Grades von f_{12}	$\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}$	$\frac{5\cdot4}{2}+\frac{5\cdot4}{2}$	4+6·6+4	1+15·3 +15·3+1	28+140 +28	210 +210	924
	20	20	44	92	106	420	924
Entsprechende Spaltungen v. f_{12} in $\varphi_6\psi_6$	10	10	22	46	98	210	462
Spaltungen von f_{12} in conj. imag. Factoren $\varphi_6\psi_6$	32	0	0	0	0	0	0
Reelle Spaltungen überhaupt	42	10	22	46	98	210	462
Reelle Spaltungen v. f_{12} in $\varphi_2\psi_{10}$	6	1+5	6+4	15+3	28+3	45+1	66
Gesamtzahl aller hier in Betracht kommenden	48	16	32	64	128	256	528

der Spaltungen von f_{12} und also aller F_μ zweiter Art:

Wir addiren hierzu etwa die Zahlen der soeben bestimm-

ten reellen F_μ erster Art:

16 16 32 64 128 256 496

und erhalten als Gesamtzahlen sämtlicher F_μ in den verschiedenen Fällen:

64 32 64 128 256 512 1024,

also lauter Potenzen von 2, worin wir bald eine Controle für die Richtigkeit unserer Zählungen finden werden.

Wir koennten diese Zählungen ja leicht noch weiter fortsetzen:

indem wir sie für beliebiges p durchführen, statt nur bei $p=5$,

indem wir die betrachteten F_μ genau so unterscheiden, wie früher die φ, nämlich nach den Ovalen der vorgelegten diasymmetrischen oder orthosymmetrischen Curve, welche sie ungeradzahlig berühren,

indem wir neben den F_μ ungerader Ordnung auch F_μ gerader Ordnung in Betracht ziehen. Wir können da ja zwar keine Anlehnung an die Theorie der ϑ nehmen, aber es hat keine Schwierigkeit, beim hyperelliptischen Gebilde die F_μ eines ganz beliebigen μ algebraisch hinzuschreiben und dann die bez. Realitätsverhältnisse abzulesen.

Alles dieses aber möge nun unterbleiben, da die Resultate ohnehin aus der nunmehr zu entwickelnden directen Realitätsmethode folgen.

Nur ein Princip wollen wir der hyperelliptischen Methode für die ferneren Entwickelungen entnehmen: Die niedersten diasymmetrischen Curven ($\lambda = 1$ oder 2) stimmen hinsichtlich der Zahl und Art der reellen Φ wie der reellen T_μ notwendig überein. Denn beiderlei Curven schließen den Fall eines reellen hyperelliptischen Gebildes mit lauter imaginären Verzweigungspunkten als Specialfall in sich.

9. Directe Realitätsdiscussion der Φ, T_μ im allgemeinen orthosymmetrischen Falle.

Wir stellen hier den orthosymmetrischen Fall voran, um nicht immer so viele Fallunterscheidungen neben einander herführen zu müssen; wir werden über den diasymmetrischen Fall dann hernach kurz referiren, was um so mehr ausreichen wird, als er ja bei der hyperelliptischen Methode bevorzugt ist.

Im Uebrigen handelt es sich um die Methode, welche ich in Bd. 10 der Annalen (1876) zunächst für die ebenen Curven 4. Ordnung entwickelte *), und die dann Hr. Weichold

*) nachdem ich vorher den einfachen Fall der ebenen Curven 3. Ordnung so behandelt hatte, wie dies in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen I p. 610 ff. entwickelt und übrigens von Harnack in seiner Dissertation (1874 Ann. 9) in's Einzelne verfolgt wird. [Clebsch selbst hatten diese Realitätsfragen durchaus fern gelegen].

in seiner Leipziger Dissertation von 1883 (vergl. Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 28) ganz allgemein für alle orthosymmetrischen und diasymmetrischen Gebilde durchgeführt hat. Hr. Weichold hat dabei nur unterlassen, die geometrischen Folgerungen zu ziehen, die hier unser Hauptinteresse ausmachen; er beschränkt sich darauf, für diese Folgerungen die functionentheoretische Grundlage zu geben.

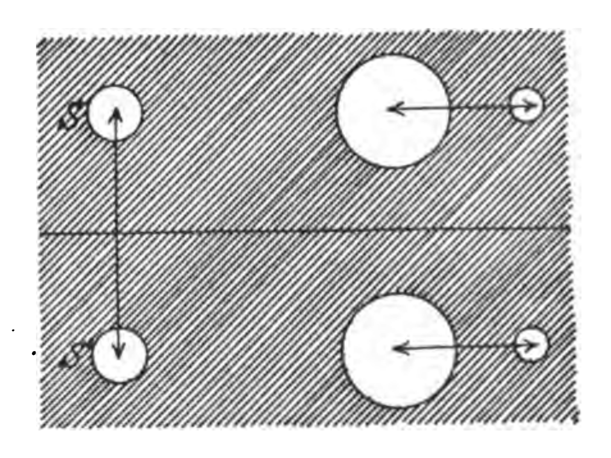
Diese functionentheoretische Grundlage ist aber kurz gesagt die, *dass wir die Realitätsverhältnisse derjenigen Normalintegrale j_α und Perioden $\tau_{\alpha\beta}$ discutiren, die bei vorgegebener symmetrischer Riemann'scher Fläche entstehen, sobald man ein noch näher zu beschreibendes symmetrisches kanonisches Querschnittsystem auf derselben zu Grunde legt.*

Von da aus werden dann einerseits diejenigen Umkehrprobleme, die zu den J_μ gehören, andererseits die Thetafunctionen der Fläche in Bezug auf Realität zu untersuchen sein.

Dabei wird sich dann nicht nur die Gesammtzahl der reellen J_μ (immer unter Einschluss der φ) ergeben, sondern auch eine directe Einsicht in ihre Eintheilung in Arten (je nach der Zahl und Lage der Ovale, welche sie ungeradzahlig berühren). Der erste Schritt sei, die geschlossene Riemann' [Di. 26.7.92.] sche Fläche vom Geschlechte p mit λ Symmetrielinien durch ein *bestimmtes ebenes Flächenstück* zu ersetzen, auf dem wir dann die verschiedenen Schnitte, die wir auf der Fläche studiren

wollen, in übersichtlichster Weise studiren können.

Wolle man die Fläche zunächst etwa längs ihrer λ Symmetrielinien zerschneiden. Sie zerfällt dann, weil wir sie als orthosymmetrisch voraussetzen, in zwei symmetrische Hälften. Auf einer derselben bringen wir nun nach Belieben $\frac{p+1-\lambda}{2}$ einander nicht begegnende, die Fläche nicht weiter zerstückende Rückkehrschnitte an. Sodann auf der anderen Hälfte die zu diesen Schnitten symmetrischen $\frac{p+1-\lambda}{2}$ Rückkehrschnitte. Endlich fügen wir die beiden Hälften wieder längs irgend einer der λ-Symmetrielinien, die wir fortan die „ausgezeichnete“ Symmetrielinie nennen wollen, aneinander. So haben wir schliesslich eine durchaus zusammenhängende Fläche mit p nach einem gewissen Symmetrieprincip gewählten Rückkehrschnitten gewonnen. Diese kann als $2p$ fach zusammenhängende Fläche mit $2p$ Randcurven schlicht in die Ebene ausgebreitet werden [wir meinen nicht durch conforme Abbildung, was erst zu untersuchen bliebe, sondern durch irgendwelche stetige Beziehung, im Sinne der Analysis situs.] Wir werden die Ausbreitung so wählen, dass sich die „ausgezeichnete“ Symmetrielinie vielleicht als horizontale Gerade darstellt, bezüglich deren die beiden symmetrischen Hälften der Fläche spiegelbildlich zusammengeordnet scheinen. Die ebene Figur, welche solcherweise entsteht, mag durch folgende Zeichnung vorgestellt werden:



Dieselbe soll eine die ganze Ebene überdeckende Membran mit $2p$ Oeffnungen vorstellen, die symmetrisch zur Mittellinie angebracht sind. Die orthosymmetrische Fläche, um welche es sich handelt, entsteht, indem man die Oeffnungen, d. h. ihre Ränder paarweise zusammengefügt denkt, so wie es durch die Pfeile der Figur angedeutet ist. Da haben wir zunächst $2(\lambda-1)$ Oeffnungen (z. B. S, S' in der Figur), bei denen die bez. Pfeile vertical stehen, bei denen also je zwei symmetrische Oeffnungen zusammengeordnet sind.

Dann aber $4 \cdot \frac{p+1-\lambda}{2}$ Oeffnungen, wie deren ein Quadrupel in der Figur rechter Hand gezeichnet ist. Hier werden zwei Randcurven der positiven Hälfte unserer Membran einander irgendwie zugewiesen und dann die entsprechenden Randcurven der negativen Hälfte in genau

symmetrischer Weise.

Auf der so versinnlichten orthosymmetrischen Fläche verabreden wir nun ein <u>bestimmtes kanonisches Querschnittsystem</u> von Schnitten

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots\ldots\ldots\ldots A_p, B_p$$

so jedes A sein zugehöriges B in einem Punkte überkreuzt, die Schnitte aber sonst sich nicht begegnen. $(\lambda-1)$ dieser Paare A, B mögen den $(\lambda-1)$ Randcurvenpaaren S, S' einzeln zugeordnet werden, die übrigen $p+1-\lambda$ zu je zwei den $\frac{p+1-\lambda}{2}$ Quadrupeln der übrigen Randcurven. Folgendermaßen:

Wir wählen bei jedem Paare S, S' die zugehörigen A, B so, wie es in der nebenstehenden Figur hervortritt: man beachte, daß das hier gezeichnete B, auf die geschlossene Fläche übertragen, in der Tat eine geschlossene Curve vorstellt.

Andererseits bei jedem Quadrupel der anderen Randcurven zwei Paare von Schnitten A_1, B_1; A_2, B_2, so wie es hier nebenstehend gezeichnet ist. Hier erscheint B_2 zunächst in zwei verschiedene

Stücke zerschnitten, man erkennt aber bald, daß er vermöge der Zusammengehörigkeit unserer Randcurven auf der geschlossenen Fläche wieder nur einen in sich zurücklaufenden Schnitt vorstellt.

Wir mögen diese Figuren folgendermaßen beschreiben:

Der Schnitt A der ersten Figur ist selbst eine Symmetrielinie.

Die Schnitte B, B_1, B_2 sind alle drei „sich selbst symmetrische" Curven, welche zweimal eine Symmetrielinie überkreuzen.

Die Schnitte A_1, A_2 der zweiten Figur bestehen je aus einem Stück der ausgezeichneten Symmetrielinie und aus der „Hälfte" von B_2 bez. B_1.

Wir untersuchen jetzt die Periodicität, welche irgend welches reelle Integral erster Gattung bei Durchlaufung der A, B .... darbietet. Dabei beachte man von vornherein, daß „Durchlaufung" von A, bei dem ausgeführten kanonischen Schnittsystem so viel ist wie „Überschreitung von A_1, daß also die Durchlaufung der A, B gerade diejenigen „Perioden" liefert, welche wir bei unserem Integral werden in Betracht ziehen wollen. Wir stellen folgende zwei einfache Grundsätze voran:

Leitet mann an einem Stücke einer Symmetrielinie

hin, so entsteht ein reeller Betrag.

Leitet man w längs zweier zu einander symmetrischer Wege, so entstehen Beträge, welche zu einander conjungirt imaginär sind.

Da ist denn klar:

Die Durchlaufung des A der ersten Figur ergiebt für w eine reelle Periode.

Die Durchlaufung der B, B_1, B_2 ergiebt rein imaginäre Perioden. Ist nämlich $(a + ib)$ der Betrag, den w giebt, wenn es längs der Hälfte von B hingeleitet wird, so entsteht bei Hinleitung von w längs der anderen Hälfte $(a + ib)$, würde doch nach unserem zweiten Grundsatze $(a - ib)$ resultiren, wenn bei Durchlaufung der zweiten Hälfte auch noch der Integrationssinn umgekehrt würde. Beides zusammen giebt aber $2ib$. Die analogen bei B_1, B_2 resultirenden Beträge nennen wir vorübergehend $2ib_1$, $2ib_2$.

Endlich, was die Durchlaufung der A_1, A_2 der zweiten Figur angeht, so nenne man die entstehenden Beträge $\alpha_1 + i\beta_1$, $\alpha_2 + i\beta_2$. Da rühren die imaginären Bestandteile $i\beta_1$, $i\beta_2$ ersichtlich nur davon her daß A_1 die Hälfte von B_2, A_2 die Hälfte von B_1 in sich schließt.

Dieserhalb ist $\beta_1 = b_2$, $\beta_2 = b_1$.

Wir wählen jetzt irgend p linear unabhängige reelle Integrale erster Gattung $w_1, w_2, \dots w_p$ aus und suchen aus ihnen die Normalintegrale $j_1 \dots j_p$ zusammenzusetzen, d.h. Integrale, welche bei Ueberschreitung der $A_1 \dots\dots A_p$ das Periodicitätsschema darbieten:

	A_1	…	A_p
j_1	1	0	0
j_2	0	1	0
⋮			
j_p	0	0	1

Sei etwa

$$j_\alpha = c_{\alpha 1} w_1 + c_{\alpha 2} w_2 + \dots\dots c_{\alpha p} w_p .$$

Wir werden dann zur Bestimmung der $c_{\alpha\beta}$ p lineare Gleichungen bekommen, indem wir die Perioden vergleichen, welche einerseits j_α andererseits die lineare Verbindung der w bei Durchlaufung der verschiedenen w darbietet. Letztere Perioden sind, wie wir wissen, alle rein imaginär. Daher der wichtige Satz: _Die $c_{\alpha\beta}$ der vorhandenen Gleichungen_ sind alle rein imaginär.

Wir werden kurz sagen dürfen, _dass die Normalintegrale j_α selbst rein imaginär sind._

Um doch mit reellen Integralen zu tun zu haben, setzen wir

$$j'_\alpha = i\, j_\alpha .$$

[Do. 28.7.92.] Die j'_α bieten dann an den $A_1 \dots\dots A_p$ das folgende Periodenschema dar.

	A_1		$\dots\dots\dots$ A_p
j'_1	1	0	$\dots\dots\dots$ 0
j'_2	0	1	$\dots\dots\dots$ 0
$\vdots$			
j'_p	0	0	$\dots\dots\dots$ 1

,

an den $B_1 \dots\dots B_p$ aber das nachstehende:

	B_1 $\dots\dots\dots$	B_p
j'_1	$-\tau''_{11} + i\tau'_{11}$	$-\tau''_{1p} + i\tau'_{1p}$
$\vdots$		
j'_p	$-\tau''_{p1} + i\tau'_{p1}$	$-\tau''_{pp} + i\tau'_{pp}$

,

wo die Bezeichnung $\tau_{\alpha\beta} = \tau'_{\alpha\beta} + i\tau''_{\alpha\beta}$ in früherer Weise gebraucht ist. Und nun ist das Wesentliche, daß uns die vorangehenden Betrachtungen ohne weiteres ermöglichen, <u>die imaginären Bestandteile dieses zweiten Periodenschemas anzugeben</u>. Entsprechend der Construction unseres Querschnittsystems unterscheiden wir $(\lambda - 1)$ Querschnitte B des ersten Typus: diese mögen bei unserem Schema voranstehen und also mit $B_1, B_2, \dots\dots B_{\lambda-1}$ benannt sein, und $\frac{p-\lambda+1}{2}$ Paare Querschnitte B des zwei-

ten Typus, von denen jedesmal zwei zusammengehörige unmittelbar aufeinander folgen müssen, so dass also beispielsweise $\breve{\mathfrak{B}}_\lambda$ und $\breve{\mathfrak{B}}_{\lambda+1}$ zusammengehörige $\mathfrak{B}$ des zweiten Typus sind. Wir haben nun uns die Sätze über die imaginären Teile der Perioden, welche ein beliebiges reelles Integral an den Querschnitten $\breve{\mathfrak{B}}$ besitzt, mit den bekannten Perioden, welche unsere j'_λ an den $\mathfrak{A}$ aufweisen, zu combiniren, um für die imaginären Teile $iT'_{\lambda\rho}$ unseres zweiten Schemas die folgende Tabelle zu erhalten:

	$\breve{\mathfrak{B}}_1$	…	$\breve{\mathfrak{B}}_{\lambda-1}$	$\breve{\mathfrak{B}}_\lambda$	$\breve{\mathfrak{B}}_{\lambda+1}$	…	$\breve{\mathfrak{B}}_{p-1}$	$\breve{\mathfrak{B}}_p$
j'_1	0	…	0	0	0	…	0	0
⋮								
$j'_{\lambda-1}$	0	…	0	0	0	…	0	0
j'_λ	0	…	0	0	$\frac{i}{2}$	…	0	0
$j'_{\lambda+1}$	0	…	0	$\frac{i}{2}$	0	…	0	0
⋮								
j'_{p-1}	0	…	0	0	0	…	0	$\frac{i}{2}$
j'_p	0	…	0	0	0	…	$\frac{i}{2}$	0

<u>Die sämmtlichen imaginären Bestandteile sind gleich Null, bis auf gewisse Bestandteile $\frac{i}{2}$, die rechter Hand bez. linker Hand von der Hauptdiagonale stehen.</u>

Wir betrachten jetzt insbesondere diejenigen Integralwerte $j_{\alpha}^{\prime x,z}$, welche von einem reellen Punkte z der nullten Symmetrielinie S^{0} zu einem reellen Punkte x irgendwelcher Symmetrielinie S_{β} hingeleitet sind. Wir kommen von S_{0} zu S_{β}, indem wir die „Hälfte" des zugehörigen Querschnittes R_{β} durchlaufen. Hierbei werden die sämmtlichen Integrale j_{α}' nur um einen reellen Bestandteil geändert, einzig j_{β}' wächst um eine Grösse, deren imaginärer Bestandteil $1/2$ ist. Daher werden also unsere sämmtlichen Integrale $j_{\alpha}^{\prime x,z}$ reell sein mit Ausnahme des einen, dessen Index mit dem Index der Symmetrielinie übereinstimmt, auf welchem x liegt, und dieses eine hat den imaginären Teil $\frac{i}{2}$. Alles dieses natürlich mod. $P_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}'$ genommen.

Vielleicht bemerken wir noch den entsprechenden Satz, der sich auf die Summe $j_{\alpha}^{\prime x,z} + j_{\alpha}^{\prime \bar{x},z}$ bezieht, unter x, $\bar{x}$ zwei symmetrisch gelegene Punkte unserer Fläche verstanden. Wir können uns diese Summe so gebildet denken, dass wir von dem reellen Punkte z zu den „conjugirten" Punkten x auf „conjugirten" Wegen hinintegriren. Dann wird unsere Integralsumme notwendig reell. Schränken wir die Integrationswege in keiner Weise ein, so wird da Integralsumme doch immer mit einer reellen Grösse mod. $P_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}'$ congruent sein müssen.

Betrachten wir jetzt irgendwelches Umkehrproblem:

$$j_\alpha'^{x_1,z} + j_\alpha'^{x_2,z} + \dots\dots \equiv b'_\alpha \pmod{P_{\alpha\beta}, P'_{\alpha\beta}}. \quad [\alpha = 1,2 \dots p]$$

Wir fragen, wann dasselbe reell ist, d. h. durch Punkte $x_1, x_2 \dots\dots$ befriedigt werden kann, die, soweit sie nicht einzeln reell sind, sich paarweise als conjugirt imaginäre zusammenordnen. Wir finden nach den vorhergehenden Sätzen ohne weiteres, daß zu dem Zwecke die b'_α entweder direct reell sein müssen (d. h. sofern wir geeignete Multipla der $P_{\alpha\beta}, P'_{\alpha\beta}$ ihnen zufügen oder von ihnen abziehen) oder auch für die Indices $\alpha = 1,2 \dots\dots (\lambda-1)$ imaginäre Bestandteile aufweisen dürfen. Zugleich erkennen wir: Ist für $\alpha = 1,2,\dots (\lambda-1)$ das b'_α reell, so trägt die Symmetrielinie S_α eine paare Zahl reeller Punkte $x_1, x_2 \dots\dots$ (d. h. eine Zahl, die auch Null sein kann); enthält dagegen das bezügliche b'_α den imaginären Bestandteil $\frac{i}{2}$, so liegt auf der Symmetrielinie S_α eine unpaare Zahl der x (also mindestens eines der x).

Hiermit haben wir nun alles vorbereitet, um bei unseren orthosymmetrischen Curven die Realität der Berührungsflächen F_μ $(\mu > 1)$ in einfachster Weise discutiren zu können. Wir haben 2^{2p} Schaaren dieser F_μ bestimmt durch die 2^{2p} Umkehrprobleme:

$$j_\alpha'^{x_1,z} + \dots j_\alpha'^{x_{\mu(p-1)},z} \equiv \frac{\mu k'_\alpha}{2} + \sum \varrho_\beta \frac{P_{\alpha\beta}}{2} + \sum \varrho'_\beta \frac{P'_{\alpha\beta}}{2},$$
$$[\varrho_\beta, \varrho'_\beta = 0,1].$$

unter $\bar{\mathfrak{P}}_{\alpha\beta}$, $\bar{\mathfrak{P}}'_{\alpha\beta}$ hier die Perioden der j'_α verstanden.

Welche dieser Umkehrprobleme sind reell? Wir constatiren zu dem Zwecke vorab:

<u>Die Größen K'_α dürfen wir als reelle Größen ansehen.</u>

In der Tat ist

$$K'_\alpha = j_\alpha'^{\,x_1,z} + j_\alpha'^{\,x_2,z} + \dots\dots\dots j_\alpha'^{\,x_{2p-2},z}.$$

unter $x_1, x_2, \dots x_{2p-2}$ die Schnitte verstanden, welche irgend eine „Ebene" des Raumes mit unserer Curve gemein hat. Man nehme diese Ebene reell. Dann werden diejenigen x, welche nicht paarweise imaginär sind sich in <u>paarer Zahl</u> auf den verschiedenen Symmetrielinien finden müssen. Denn die zugehörigen Curvenzüge haben, wie wir von früher her wissen, alle paaren Character. Daher u. s. w.

[Fr. 29. 7. 92.] Wir sehen jetzt also die k'_α als reelle Größen an. Darauf ist die Frage insbesondere nach den <u>reellen Umkehrproblemen</u> unter den 2^{2p} vorgegebenen ohne Weiteres beantwortet [Wir haben nur einen Blick auf das Schema der Perioden zweiter Art unserer j'_α zu werfen]:

<u>Reell sind die folgenden $2^{p+\lambda-1}$ Umkehrprobleme:</u>

$$j_\alpha'^{\,x_1,z} + \dots j_\alpha'^{\,x_{2(p-1)},z} = \frac{\varepsilon k'_\alpha}{2} + \sum_1^p \varsigma_\beta \frac{\bar{\mathfrak{P}}_{\alpha\beta}}{2} + \sum_1^{\lambda-1} \varsigma'_\beta \frac{\bar{\mathfrak{P}}'_{\alpha\beta}}{2},$$

wo also die zweite Summe auf die Werte $\beta = 1, 2, \cdots (\lambda-1)$

eingeschränkt ist. Wir brauchen dies nur für die Werte α, $\beta > (\lambda-1)$ noch zu erläutern. Ist $\alpha > \lambda-1$, so soll, damit das vorgelegte Umkehrproblem reell sei, rechter Hand eine Grösse stehen, die modulo der Perioden einer reellen Grösse aequivalent ist. Dies ist der Fall, mögen wir auch g_α z. B. gleich 1 nehmen. Denn der imaginäre Bestandteil $\frac{i}{2}$, der dadurch in die α^{te} Integralsumme hineinkommt, kann dadurch weggenommen werden, dass wir jene Periode $P'_{\alpha,\alpha\pm1}$, die selber den imaginären Bestandteil $\frac{i}{2}$ besitzt, subtrahiren. Dagegen müssen wir g'_α notwendig gleich 0 nehmen. Anderenfalls erhielten wir bei j'_α einen imaginären Bestandteil $\frac{i}{4}$, der in keiner Weise durch Zufügen weiterer Perioden weggeschafft werden könnte.

<u>Aber mehr: wir erkennen welche der Ovale $S_1 \dots S_{\lambda-1}$ unserer Curve von den φ_μ der einzelnen Schaar geradzahlig, welche ungeradzahlig berührt werden.</u> Diejenigen S_α werden geradzahlig berührt, deren g_α verschwindet, diejenigen S_α ungeradzahlig, deren g_α gleich 1 ist. ($\alpha = 1, 2, \dots (\lambda-1)$).

Fassen wir alle Schaaren von φ_μ, welche in diesem Verhalten übereinstimmen zu einer „Art" zusammen, so haben wir offenbar $2^{\lambda-1}$ „Arten" und jede Art enthält die gleiche Zahl 2^p von Schaaren. Ob endlich die Flächen einer solchen „Art" die ausgezeichnete Symmetrielinie

geradzahlig oder ungeradzahlig berühren, hängt offenbar davon ab, ob die Differenz $\mu(p-1)-\sum_1^{\lambda}\rho_\alpha$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Wir wollen doch diese Resultate noch unabhängig von unserem besonderen Schnittsystem aussprechen. Wir unterscheiden unsere F_μ in $F_\mu^{(0)}, F_\mu^{(1)}, F_\mu^{(2)}, \ldots\ldots$ je nachdem sie 0 oder 1 oder 2 ... unserer Ovale ungeradzahlig berühren. Natürlich giebt es $F_\mu^{(0)}, F_\mu^{(1)}, \ldots\ldots$ nur dann, wenn $\mu(p-1)$ ungerade. Die $0, 1, 2, \ldots$ Ovale, welche ungeradzahlig berührt werden sollen, mögen dabei irgendwie unter den λ vorhandenen Ovalen herausgesucht werden. Ich nenne die zugehörigen Schaaren von F_μ dann eine <u>combinatorisch mögliche Art</u>. Unser Resultat läßt sich dann so in Worte fassen: <u>daß jede combinatorisch mögliche Art reeller F_μ existirt und immer die gleiche Zahl 2^p unterschiedener Schaaren umfaßt.</u> Um zu specificiren, nehme man etwa die ebene C_4, also $p=3$. An orthosymmetrischen Arten haben wir da die Gürtelcurve $(\lambda=2)$ und die vierteilige Curve $(\lambda=4)$. Nun betrachten wir etwa die Berührungskegelschnitte (F_2). Wir unterscheiden $F_2^{(0)}$ und $F_2^{(2)}, F_2^{(4)}$. Zu den ersteren gehören offenbar die doppelt zählenden Geraden der Ebene. Wollen wir von diesen absehen. Wir erfahren dann:

<u>Bei der Gürtelcurve giebt es 7 Schaaren eigentlicher $F_2^{(0)}$</u>

und 8 Schaaren von $F_2^{(2)}$, bei der vierteiligen Curve dagegen 7 Schaaren eigentlicher $F_2^{(0)}$, 8 Schaaren von $F_2^{(2)}$ für jedes der 6 Paare von Ovalen, die wir unter den 4 Ovalen der Curve heraussuchen können, endlich 8 Schaaren von $F_2^{(4)}$.

Das stimmt mit den Resultaten welche Crone in Bd. 12 der Math. Annalen (1877) betreffs dieser Berührungskegelschnitte auf geometrischem Wege abgeleitet hat.

Wir kommen endlich zu den F_1 d.h. den ϕ.

Deren Theorie ist ja, wie wir wissen, von den 2^{2p} Umkehrproblemen aus:

$$j_{\alpha}^{1\,x_2,\,z} + \ldots\ldots j_{\alpha}^{1\,x_{p-1},\,z} = \frac{k'_\alpha}{2} \sum g_\beta \frac{P_{\alpha\beta}}{2} + \sum g'_\beta \frac{P'_{\alpha\beta}}{2}$$

nicht ohne weiteres zugänglich. Andererseits haben wir die bezügliche Realitätsdiscussion früher so weit vorbereitet, daß nur einer von 2 Sätzen zu beweisen blieb. Es handelte sich (hier, bei den orthosymmetrischen Curven) entweder darum zu zeigen, daß die Gesammtzahl der reellen $\phi_2^{p-1}(2\lambda-1)$ beträgt, oder aber darum, bei jener besonderen orthosymmetrischen Curve, bei welcher sich eines der λ Ovale zu einem isolirten Doppelpunkte zusammengezogen hat, die Gesammtzahl derjenigen reellen ϕ, welche nicht durch den Doppelpunkt gehen, als $2^{p+\lambda-3}$ festzustellen. Beides können wir vermöge unserer Abel'schen Entwickelungen jetzt in der That leicht bestätigen. Wir beginnen dabei mit dem

zweiten Nachweis, weil wir bei ihm mit der Betrachtung der Umkehrtheoreme reichen, während wir für den ersten Fall die Thetareihen werden heranziehen müssen.

Wir handeln also zunächst von der *Curve mit* [Mo. 1.8.92] *Doppelpunkt* (was nach den früheren Entwickelungen voraussetzt, dass $\lambda > 1$; die nur aus einem vollen Zuge bestehende orthosymmetrische Curve, die im Falle eines geraden p auftritt, werden wir hier also bei Seite lassen; übrigens erledigt sich die hinterher durch eine leichte Nebenbemerkung).

Da wollen wir die Bemerkung voranstellen, *dass sich die vorher gegebene Theorie der F_μ sehr verallgemeinern lässt.*

Weshalb konnten wir die F_μ vermöge der 2ten Umkehrprobleme discutiren? Weil die f_μ $(\mu > 1)$ aus unserer Curve eine Schaar aequivalenter Punktgruppen ausschneiden, welche gleichzeitig eine *Vollschaar* und eine *Generalschaar* ist. Habe man also irgendwelche f, welche auf unserer Curve neben festen Punkten ebenfalls eine Schaar solcher aequivalenter Punktgruppen ausschneiden, welche eine Vollschaar und Generalschaar bilden. Mit F bezeichnen wir diejenigen f, deren bewegliche Schnittpunkte mit unserer Curve paarweise zusammengerückt sind. *Über diese F werden wir dann ganz analoge Realitätstheoreme auf-*

stellen können, wie eben für die F_μ. Insbesondere ist die Gesammtzahl der reellen F gleich $2^{p+\lambda-1}$.

Von dieser Verallgemeinerung haben wir nun blos specielle Anwendung auf unsere Curve mit Doppelpunkt zu machen. Unsere Curve mit Doppelpunkt stellt, wie wir wissen, eine solche orthosymmetrische Curve unseres Raumes von $(p-1)$ Dimensionen dar, welche $(\lambda-1)$ reelle Züge besitzt. Auf dieser Curve schneiden nun die Ebenen unseres Raumes eine g^{p-1}_{2p-2} aus, d.h. gerade eine Vollschaar aequivalenter Punktgruppen g_{2p-2}, welche eine Generalschaar (keine Specialschaar) ist. Daher giebt es $2^{(p-1)+(\lambda-1)-1}$ d.h. $2^{p+\lambda-3}$ reelle Ebenen, welche unsere Curve überall berühren, wo sie treffen. Das ist aber gerade, was bewiesen werden sollte.

Denn die überall sonst berührenden Ebenen, welche durch den Doppelpunkt der Curve gehen, zählen hier nicht mit.

(Die Nebenbemerkung, durch die wir die ϕ im Falle der einteiligen orthosymmetrischen Curve eines geraden p erledigen, ist die: es könnte sich da nur um reelle ϕ handeln. Andererseits wissen wir, daß die Theorie unserer Curve, was die Realitätsverhältnisse angeht, mit der Theorie der nullteiligen Curve stimmen muß. Aber bei dieser kann es nimmermehr reelle ϕ geben. Daher ist auch bei der vorgegebenen Curve die Zahl der reellen ϕ und damit überhaupt die Zahl der reellen $\phi = 0$).

Wir handeln ferner von der <u>Bestimmung der φ durch die Thetafunctionen.</u> Wir hatten die Thetafunctionen durch die Reihen definirt:

$$\vartheta\left|{g \atop h}\right| = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\cdots e^{i\pi\left[\Sigma(u_\alpha+\frac{g_\alpha}{2})(u_\beta+\frac{g_\beta}{2})\tau_{\alpha\beta}+2\Sigma(u_\alpha+\frac{g_\alpha}{2})(j_\alpha+\frac{h_\alpha}{2})\right]};$$

unter ihnen sollten wir insbesondere die ungeraden aussuchen, d.h. diejenigen, für welche $g_1 h_1 + g_2 h_2 + \cdots g_p h_p = 1$ (mod. 2). Wir beziehen dann unsere Curve der φ auf dasjenige Coordinatensystem, welches durch die Gleichungen definirt ist:

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots\ldots \varphi_p = dj_1 : dj_2 : \ldots\ldots\ldots dj_p,$$

und haben in

$$0 = \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial j_1}\left|{g \atop h}\right|\right)_{0,0\ldots\ldots0}\cdot\varphi_1 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial j_2}\left|{g \atop h}\right|\right)_{0,0\ldots\ldots0}\cdot\varphi_2 + \cdots\cdots\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial j_p}\left|{g \atop h}\right|\right)_{0,0\ldots}$$

das einzelne zu dem ungeraden $\vartheta\left|{g \atop h}\right|$ gehörige φ. Hier tragen wir jetzt für die Differentialquotienten der ϑ die Reihenentwickelung ein. Unser φ wird reell sein, sobald dabei nach Abtrennung irgend eines allen Differentialquotienten gemeinsamen Factors reelle Grössen zum Vorschein kommen. Nun wird beispielsweise $\frac{\partial\vartheta}{\partial j_1}\left|{g \atop h}\right|$ nach Abtrennung des vom Index 1 unabhängigen Factors $2i\pi \cdot \frac{g_\alpha h_\alpha}{2} i\pi$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\ldots\, 2\left(u_1+\frac{g_1}{2}\right)\cdot e^{i\pi\left[\Sigma(u_\alpha+\frac{g_\alpha}{2})(u_\beta+\frac{g_\beta}{2})\cdot\tau_{\alpha\beta}+\Sigma u_\alpha h_\alpha\right]};$$

ich habe dabei für die $j_1 \ldots j_p$ bereits $0 \ldots 0$ eingetragen. Der auftretende Exponentialfactor setzt sich für $\tau_{\alpha\beta} = \tau'_{\alpha\beta} + i\tau''_{\alpha\beta}$ aus den drei Factoren zusammen:

$$e^{i\pi\Sigma n_\alpha h_\alpha}\cdot e^{i\pi\Sigma\left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta+\frac{g_\beta}{2}\right)\cdot\tau'_{\alpha\beta}}\cdot e^{-\pi\Sigma\left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta+\frac{g_\beta}{2}\right)\tau''_{\alpha\beta}},$$

deren erster und dritter an sich reell sind, während zur Beurteilung des zweiten Factors die Tabelle der $i\tau'_{\alpha\beta}$ herangezogen werden muss, welche wir auf pag. 261 mitteilten. Dieser Tabelle zufolge sind alle $i\tau'_{\alpha\beta}$ gleich Null für die α oder $\beta < \lambda$, während für $\alpha \geqq \lambda$ oder für $\beta \geqq \lambda$ immer ein $i\tau'_{\alpha\beta}$ auftritt, welches $-\frac{i}{2}$ ist. Die Folge ist, dass wir, wenn wir Reelles haben wollen alle g_α, g_β, deren Index $< \lambda$ ist, beliebig lassen dürfen, alle $g_\alpha g_\beta$ aber, deren Index $\geqq \lambda$, gleich Null setzen müssen. Dies ist das ganze hier in Betracht kommende Princip. Ihm zufolge bestimmt sich die Gesammtzahl der reellen φ folgendermassen: Wir können $h_\lambda \ldots\ldots h_p$ jedenfalls beliebig nehmen (da die correspondirenden $g_\lambda \ldots\ldots g_p$ ja Null sein sollen). Dies giebt $2^{p+1-\lambda}$ Möglichkeiten. Wir werden dann die übrigen $g_1 \ldots g_{\lambda-1},\ h_1 \ldots h_{\lambda-1}$ sonst auch beliebig, nur so wählen müssen, dass $g_1h_1 + \ldots g_{\lambda-1}h_{\lambda-1} \equiv 1$ (mod. 2). Dies giebt $2^{\lambda-2}(2^{\lambda-1}-1)$ Möglichkeiten. Beides zusammen $2^{p-1}(2^{\lambda-1}-1)$ Möglichkeiten und also

$$2^{p-1}(2^{\lambda-1}-1) \text{ reelle } \varphi,$$

was gerade bewiesen werden sollte.

Wir knüpfen daran noch eine Bemerkung über die reellen F_μ ungerader Ordnung. Wir haben die F_μ in zwei Classen geteilt, je nachdem sie einem φ zugeordnet waren;

oder nicht. Nun werden wir bei unserer orthosymmetrischen Curve die F_μ andererseits in

$$F_\mu^{(\lambda)},\ F_\mu^{(\lambda-1)},\ F_\mu^{(\lambda-4)}\ \text{etc.}$$

einteilen, je nach der Zahl der Ovale, welche sie ungeradzahlig berühren: die so unterschiedenen F_μ zerfallen dann wieder in Arten, je nach der Auswahl der Ovale, welche sie ungeradzahlig berühren. Endlich enthält jede Art 2^p unterschiedene Schaaren von F_μ.

Dieselben Unterscheidungen haben wir aber früher bei den Φ gemacht. Es ergab sich, daß $\Phi^{(\lambda)}$ nicht existiren (nämlich bei der orthosymmetrischen Curve), daß aber alle anderen, combinatorisch möglichen Arten $\Phi^{(\lambda-2)}$, $\Phi^{(\lambda-4)}$ etc. vorhanden sind und jede einzelne dieser Arten 2^{p-1} reelle Φ umfaßt. Sonach kommt:

<u>Die $F_\mu^{(\lambda)}$ sind alle von der zweiten Classe.</u>
<u>Von den 2^p F_μ jeder Art gehört immer die Hälfte der ersten Classe, die andere Hälfte der zweiten Classe an.</u>

E. Directe Realitätsdiscussion der F_μ bez. der Φ in den diasymmetrischen Fällen.

Um jetzt die diasymmetrischen Fälle in entsprechender Weise zu erledigen, stellen wir vor allem den Fall $\lambda = 0$ bei Seite; wir werden hernach auf ihn zurückkommen. Für die anderen Fälle aber können wir genau so verfahren, wie

es bei den orthosymmetrischen Fällen geschah. Ich werde die Einzelheiten überspringen und nur kurz referiren.

Erstlich handelt es sich darum, bei Zugrundelegung einer „ausgezeichneten" Symmetrielinie eine „symmetrische" kanonische Zerschneidung der Fläche zu verabreden. Weichhold führt das in der Weise aus, daß er (in unserer Bezeichnung) wieder reelle p Integrale $j'_\alpha = i j_\alpha$ erhält, bei denen man natürlich nach den imaginären Bestandteilen der Perioden zweiter Art fragen wird. Und hier bekommt er die folgende Tabelle: [Di. 2.8.92]

	B_1	$B_{\lambda-1}$	B_λ	B_p
j'_1	0	0	0	0
$j'_{\lambda-1}$	0	0	0	0
j'_λ	0	0	$\frac{i}{2}$	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
j'_p	0	0	0	$\frac{i}{2}$

Diese Tabelle enthält sonst lauter Nullen, nur die letzten $p+1-\lambda$ Stellen der Hauptintegrale sind mit $\frac{i}{2}$ besetzt.

Von hier aus entwickelt man dann die Theorie der F_μ $(\mu > 1)$ genau so wie vorhin. Es kommen auch genau dieselben Sätze:

Es giebt, Alles in Allem, $2^{p+\lambda-1}$ reelle Schaaren von F_μ, nämlich je 2^p von jeder der $2^{\lambda-1}$ combinatorisch möglichen Arten. Ebenso die Theorie der φ, wobei man nach Belieben

die Doppelpunktsmethode oder die Betrachtung der Thetafunctionen heranziehen kann. Dies eine hat sich ja freilich hier geändert, dass nur in allen combinatorisch möglichen Arten der ϕ genau 2^{p-1} ϕ vorhanden sein werden.

In Folge dessen modificirt sich der bei den orthosymmetrischen Curven an letzter Stelle angegebene Satz hier dahin, dass jetzt unter den 2^p irgend welcher Art angehörigen ϕ, ungerader Ordnung immer gerade die Hälfte der ersten Classe, bez. der zweiten Classe angehören wird.

Sprechen wir jetzt vom Falle $\lambda = 0$. Da ist jedenfalls dies es anders, dass jetzt eine andere Art der symmetrischen Zerschneidung ausgeführt werden muss als bisher; denn es kann dort hier, wo überhaupt keine Symmetrielinie vorhanden ist, auch keine Symmetrielinie mehr ausgezeichnet werden.

Weichhold benutzt zur Construction einer bezüglichen Zerschneidung insbesondere solche sich selbst symmetrische Curven, deren beide Ufer sich bei der symmetrischen Umformung vertauschen (und die natürlich keinen einzigen sich selbst symmetrischen Punkt enthalten). Er kommt so zu reellen Normalintegralen j, deren τ_{ij} so angegeben werden können, wie es in der nachstehenden Tabelle geschieht:

	B'_1	B'_2	⋯	B'_p
j_1	0	$\frac{1}{2}$	⋯	$\frac{1}{2}$
j_2	$\frac{1}{2}$	0	⋯	$\frac{1}{2}$
⋮				
j_p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	⋯	0

(wo jetzt die 0 nur in der Hauptdiagonale stehen). Von hier aus zählt man natürlich die reellen φ sofort mit Hülfe der Thetafunktionen ab. Dagegen stößt die Abzählung der reellen Φ_μ darum gleich anfangs auf eine gewisse Schwierigkeit, weil man keine Integrale $j_i^{x,z}$ construiren kann, bei denen der Punkt z ein reeller Punkt wäre. Ich werde um so lieber auf die Durchführung aller dieser Dinge verzichten können, als ja das Resultat von der hyperelliptischen Methode heraus von vornherein bekannt ist. Wir lernten damals, daß bei der nullteiligen Curve ebensoviele reelle φ bez. Schaaren Φ_μ vorhanden sind wie bei der niedersten orthosymmetrischen Curve des betr. Geschlechtes. Nun beachte man noch, daß letztere einteilig oder zweiteilig ist, jenachdem p gerade oder ungerade.

Das Resultat ist schließlich dieses:

p gerade: Es giebt bei unserer nullteiligen Curve keine reellen φ und 2^p reelle Schaaren von Φ_μ.

p = ungerade: Es giebt 2^{p-1} reelle φ und 2^{p+1} reelle Schaaren

von F_μ *)

F. Von der Verteilung der Charakteristiken auf die einzelnen Schaaren reeller F_μ, bez. die reellen Φ.

Wir besprechen hier noch eine letzte Frage. Unsere Theorie der Abel'schen Functionen ergab nicht nur die Gesammtzahl reeller Schaaren von F_μ etc., sondern für jede dieser Schaaren etc. auch eine *bestimmte Charakteristik*; nämlich eine *Elementarcharakteristik*, wenn μ gerade, eine Primcharakteristik, wenn μ ungerade $\geqq 1$.**) Natürlich hängt dieselbe nicht nur von der gegebenen Curve als sol-

---

*) Vielleicht kann man noch bemerken, daß es von der hyperelliptischen Methode aus möglich sein muß, auf unserer Riemann'schen Fläche $\lambda = 0$ genau ein solches Querschnittsystem und ein solches Periodenschema zu construiren, wie wir es früher im niedersten orthosymmetrischen Falle benutzten; dadurch würde dann die Theorie der beiden Flächenarten in ein noch klareres Verhältniß gesetzt werden, als dies vermöge der Weichhold'schen Entwickelungen geschieht.

**) Wir können uns dahin aussprechen, daß die Theorie der Abel'schen Functionen unter den Wurzeln der algebraischen Gleichung, von deren Auflösung die Trennung der verschiedenen Schaaren von F_μ abhängt, durch Angabe der zugehörigen Charakteristik eine *Separation* vollzieht; durch die Charakteristik wird eine Wurzel vor allen anderen gekennzeichnet.

cher ab, sondern auch von der Zerschneidung, welche wir für die zur Curve gehörige Riemann'sche Fläche in Aussicht nehmen mögen. Um so interessanter wird es sein, jeder F_μ oder φ, welche wir reell bei gegebener Curve aufweisen mögen, nach Festlegung der zu wählenden Zerschneidung die ihr zugehörige Charakteristik wirklich hinzuzusetzen.

Möge es sich erstlich um die Elementarcharakteristik eines geraden F_μ: $\begin{vmatrix} \rho_1 \dots \rho_{\lambda-1} \rho_\lambda \dots \rho_p \\ \rho_1' \dots \rho_{\lambda-1}' \rho_\lambda' \dots \rho_p' \end{vmatrix}$ handeln. Da werden wir auf Grund unserer früheren Ausführungen gleich sagen können: Die $\rho_\lambda' \dots \rho_p'$ sind bei der reellen F_μ jedenfalls gleich 0. Ferner richten sich die Werte der $\rho_1 \dots \rho_{\lambda-1}$ darnach, ob die verschiedenen Symmetrielinien $S_1, \dots S_{\lambda-1}$ der Curve von der F_μ geradzahlig oder ungeradzahlig berührt werden mögen. Wie aber bestimmen sich die Werte der übrigen ρ, ρ'? Das muss von der Auswahl derjenigen Bestandteile unseres Querschnittsystems abhängen, die nicht in die Symmetrielinien fallen.

Noch weniger wissen wir a priori über die Primcharakteristiken der ungeraden F_μ resp. φ. [Di. 4. 8. 92.] Wir können natürlich über die Differenzen zweier Primcharakteristiken, die sich auf verschiedene F_μ bez. φ beziehen, dieselben Bemerkungen machen wie eben über die Elementarcharakteristiken.

Was aber die Primcharakteristiken selbst angeht,

so ist die einzige bis jetzt bekannte Methode zu ihrer Bestimmung diejenige, die ich in Bd. 11. der math. Annalen (1876) für die ebenen Curven 4. Ordnung benutzte. Ich lasse dort nämlich die C_4 in einen doppeltzählenden Kegelschnitt, d.h. eine hyperelliptische Curve übergehen und benutze bei letzterer die von Prym (oder auch von C. Neumann und Thomae) abgeleiteten Resultate. Natürlich reicht dieser Ansatz genau so weit wie die hyperelliptische Methode überhaupt, erledigt also die sämmtlichen diasymmetrischen Gebilde, von den orthosymmetrischen Gebilden aber nur die beiden extremen Fälle.

Hier zunächst die Festlegung der Primcharakteristiken für das hyperelliptische Gebilde selbst. Ich benutze dabei die Regel, welche diesbezüglich in Bd. 32 der math. Annalen (1888) von mir aufgestellt und von Burkhardt begründet worden ist [in unseren Arbeiten über hyperelliptische Sigmafunctionen], die übrigens in der demnächst erscheinenden Dissertation von Hr. Thompson noch verschiedentlich entwickelt werden wird. Die Function $\vartheta \left|{g \atop h}\right| (j_1^{x,z} \dots j_p^{x,z})$ wird, wenn man x an den Querschnitten A_β. B_β entlang leitet, abgesehen von Exponentialfactoren, die wir hier bei Seite lassen, die Vorzeichenfactoren $(-i)^{g_\beta}$, $(-i)^{h_\beta}$ erhalten. Wie hängen dieselben mit derjenigen Zerspaltung der Verzweigungsform f_{2p+2} in zwei Fac-

ren $\varphi_{p+i-2\varrho}$ $\psi_{p+i+2\varrho}$ zusammen, die unserem ϑ |9|
entspricht? Wir beantworten das so, daß wir zunächst die Durchlaufung nur von „Elementarwegen" in Betracht ziehen und hernach (was kaum erläutert zu werden braucht) die A_β B_β je aus lauter Elementarwegen zusammensetzen. Elementarwege sollen dabei solche sich selbst nirgends überkreuzende Wege genannt werden, welche 2 der Verzweigungspunkte von den übrigen 2p abtrennen.

Und die auf sie bezügliche Regel ist diese: <u>der Verzweigungsfactor, welcher dem einzelnen ϑ bei Durchlaufung des Elementarwegs zutrifft, ist +1 oder −1 je nachdem die beiden von dem Elementarweg umschlossenen Verzweigungspunkte sich auf die beiden dem ϑ entsprechenden Factoren φ. ψ vertheilen oder nicht vertheilen.</u> Wollen wir dies an demselben Beispiele näher verfolgen, welches ich l. c. in Anm. 11 behandelte. Wir nehmen zunächst ein hyperelliptisches Gebilde $p = 3$ mit 8 reellen Verzweigungspunkten und bringen bei ihm diejenige kanonische Zerschneidung an, welche in folgender Figur dargestellt ist:

es ist diejenige Zerschneidung, welche ich gewöhnlich die Weierstraß'sche Zerschneidung nenne, weil sie eben diejenigen kanonischen Perioden liefert, welche Weierstraß seiner Zeit seiner Theorie der hyperelliptischen Functionen zu Grunde legte. Uebrigens subsummirt sich die Zerschneidung genau unter die Schemata, welche wir nach Hr. Weichold für die orthosymmetrischen Fälle kennen lernten. Hier sind nun A_1, A_2, A_3, B_3 selber Elementarwege, wie man sofort sieht, und auch B_1 ist ein Elementarweg, weil durch dasselbe 1 und 4' von den anderen Verzweigungspunkten abgetrennt werden. B_2 aber setzt man aus den beiden Elementarwegen: $B_2' = 2'3$ und $B_3 = 3'4$ zusammen, wie folgende Figur erläutert:

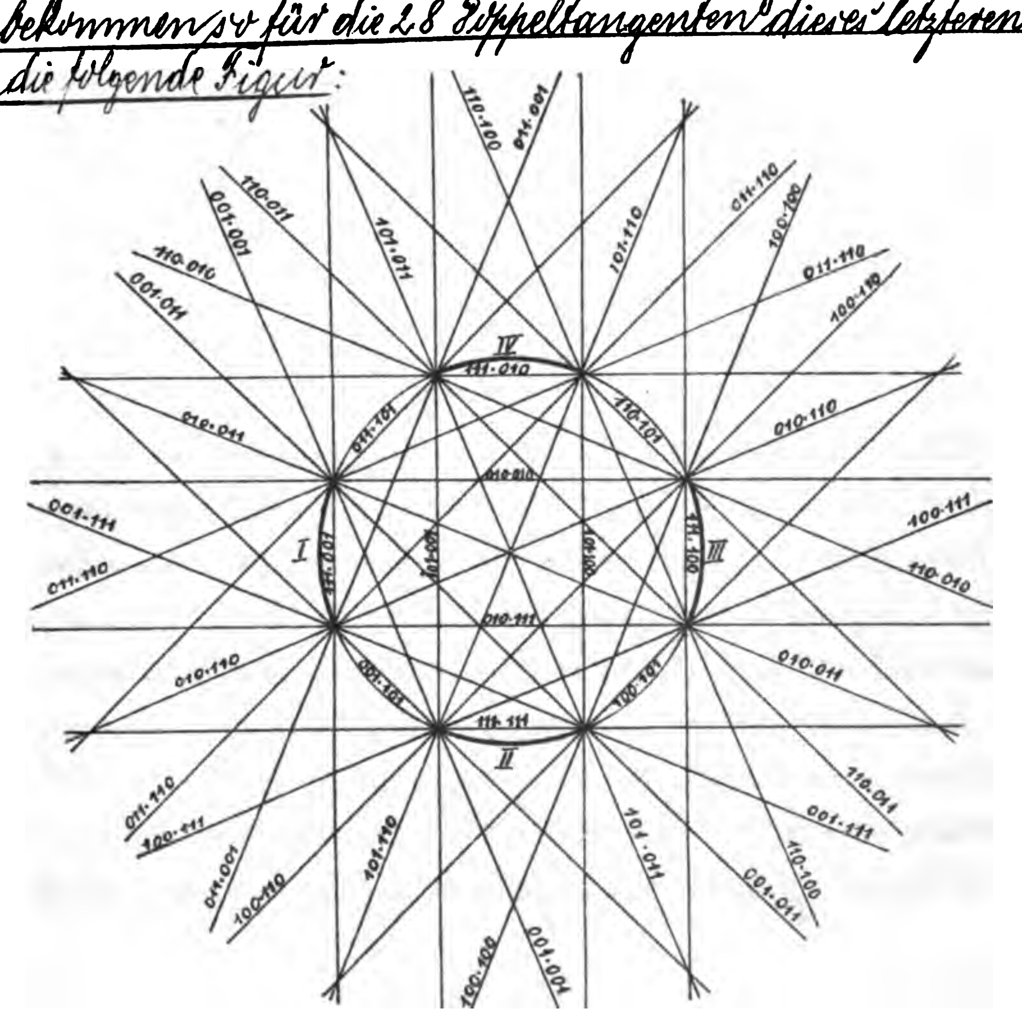
Handle es sich nun um die Primcharacteristik $\left|{g \atop h}\right|$ welche irgend einer der 28 Zerspaltungen von f_8 in $\varphi_2 \cdot \psi_6$ zugeordnet ist, etwa derjenigen, wo φ_2 in 1 und 1' verschwindet. Wir bekommen dann nach unserer Regel für die Durchlaufung der Elementarwege

die Vorzeichen-	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
Factoren	−1	−1	−1	+1	−1	−1

daher für Durchlaufung von $\mathfrak{Z}_3$ den Vorzeichenfaktor +1. Wir stellen hieraus die folgende Tabelle zusammen:

A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
$(-1)^1$	$(-1)^1$	$(-1)^1$	$(-1)^0$	$(-1)^0$	$(-1)^1$

und lesen von da das Resultat ab: Die Primcharakteristik der ausgewählten Zerspaltung von f_8 ist 111, 001. Es erübrigt, daß wir die gleichen Ueberlegungen für alle anderen Zerspaltungen von f_8 in $\varphi_2 \cdot \psi_6$ durchführen und dann zur hyperelliptischen $\mathfrak{C}_4$, d. h. dem doppeltzählenden Kegelschnitte mit 8 reellen Scheiteln, übergehen. Wir bekommen so für die 28 Doppeltangenten dieses letzteren die folgende Figur:



Und dieser Figur bleibt ungeändert in Gültigkeit, wenn wir jetzt schließlich zur allgemeinen C_4 übergehen, indem wir etwa die in der Figur stärker ausgezogenen Segmente der Kegelschnitte zu Ovalen der Curve 4. Ordnung dehnen.

Man beachte etwa noch, daß die ersten drei Zahlen q_1, q_2, q_3 der Charakteristik gerade dann gleich 0 oder 1 werden, wenn das zugehörige Oval seitens der Doppeltangente ungeradzahlig oder geradzahlig berührt wird. Das ist genau umgekehrt, wie im Falle der Elementarcharakteristiken. Endlich mögen wir hervorheben, daß man an der so gewonnenen Figur alle die Gruppirungssätze, welche man betreffs der 28 Doppeltangenten aus den Charakteristiken [illegible] derselben abgeleitet hat, in concreto controliren

und in's Einzelne verfolgen kann.

[24.5.892]

Wir schließen hiermit unsere Erläuterungen über die geometrischen Anwendungen der Abel'schen Functionen.

Der Kernpunkt war die Aufstellung der Schemata für die reellen Bestandteile der jedesmal in Betracht zu ziehenden $T_{\alpha\beta}$, pg. 259 ff., 273, 275. Nach der auf pg. 276 unten beigefügten Bemerkung können wir, wenn wir wollen, der nullteiligen Curve dasselbe bezügliche Schema erteilen, wie der niedersten orthosymmetrischen. So bleiben dann $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ orthosymmetrische Schemata und p diasymmetrische (im Ganzen $\left[\frac{3p+2}{2}\right]$). Die Zahl dieser Schemata kann auch nicht etwa durch Abänderung der Querschnittsysteme noch weiter herabgedrückt werden. Denn zwei Curven, welche bei irgendwelcher Auswahl der Querschnitte dasselbe Schema angeben, liefern vermöge der zugehörigen ungeraden ϑ dieselbe Zahl reeller φ, und die Zahlen reeller φ, die wir bei unseren orthosymmetrischen Curven haben: $2^{p-1}(2^{\lambda-1}-1)$ sowie diejenigen, die wir bei den diasymmetrischen Curven haben: $2^{p+\lambda-2}$ sind, wenigstens bei geradem p, alle verschieden. {bei ungeradem p werden die beiden Zahlen, welche der orthosymmetrischen Curve mit $\lambda = 2$ und der diasymme-

trischen Curve mit $\lambda = 1$ zugehören, in der Tat einander gleich }. Wir müssen dagegen eine Arbeit von <u>Hurwitz</u> Stellung nehmen (Bd. 94 des Journals, 1882), in welcher <u>Hurwitz</u> ein mit unserer Fragestellung sehr verwandtes Problem behandelt, nämlich dasjenige der Realität der Perioden reeller $2p$ fach periodischer Functionen von p Argumenten. Hurwitz hat dort scheinbar nur $p+1$ Schemata, nämlich unsere p diasymmetrischen Schemata für $\lambda = 1, 2 \ldots p$ und unser orthosymmetrisches für $\lambda = p+1$ (wo sämmtliche $\tau_{\alpha\beta}$ rein imaginär sind). Aber es liegt dies nur daran, weil er die Untersuchung nicht so weit durchgeführt hat wie wir. Er legt nämlich keinen Wert darauf, ein <u>kanonisches</u> Periodenschema zu haben. Und geht man von der hierin liegenden Forderung ab, so kann man die $\left[\frac{p}{2}\right]$ Schemata, welche bei uns den orthosymmetrischen Fällen mit $p-1, p-3 \ldots$ Symmetrielinien entsprechen, in der Tat sofort auf die correspondirenden diasymmetrischen Fälle zurückführen. Es genügt in unseren Schematen die Columnen B_p und B_{p-1}, B_{p-2} und $B_{p-3} \ldots B_{\lambda+1}$ und B_λ beziehungsweise mit einander zu vertauschen.

Schlußbemerkungen.

Indem wir nunmehr diese Vorlesung schließen, ist der eine der drei Programmpunkte, die wir am Ende des vorigen Semesters in Aussicht nahmen, unerledigt geblieben: die Theorie der auf einer Riemann'schen Fläche bestehenden <u>algebraischen Correspondenzen</u> $f(x,y)=0$ und die nähere Begründung resp. Umgränzung des für sie geltenden <u>Correspondenzprincips</u>. Sei es gestattet, dieserhalb auf die Darstellung zu verweisen, welche die bezüglichen Theoreme inzwischen in den von <u>Fricke</u> herausgegebenen Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen gefunden haben. Es handelt sich um das 2. Kapitel des sechsten Abschnitts daselbst, wo in der Tat genau diejenigen Betrachtungen entwickelt werden, die ich ursprünglich für die vorliegende Vorlesung in Aussicht genommen hatte.

Dies ist natürlich nicht die <u>einzige</u> Erweiterung, welche wir bei systematischer Darstellung den Entwickelungen dieser Vorlesung würden können zu Teil werden lassen. Wir haben auf unseren geschlossenen Riemann'schen Flächen nur <u>algebraische Functionen</u> und <u>Integrale algebraischer Functionen</u> studirt, d.h.

Funktionen ohne wesentlich singuläre Punkte, welche entweder (auf der Fläche) eindeutig sind, oder periodisches Verhalten zeigen. Der nächste Fortschritt wäre, *dass wir überhaupt solche Funktionen auf der Fläche in Betracht ziehen, welche sich bei Umläufen über die Fläche hin linear substituiren* (vergl. etwa die Erläuterungen in Bd. 23 der Annalen [1883], p 592 ff).

Da sind erstlich Funktionen η, welche sich nur in $\alpha\eta$ verwandeln (darunter die algebraischen „Wurzelfunktionen"), dann die zuerst von *Prym* in Crelle 70 untersuchten η, welche in $\alpha\eta + \beta$ übergehen, endlich die η, die allgemeine lineare Substitutionen $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ erfahren und als Quotienten zweier Partikularlösungen η_1, η_2 einer zur Riemann'schen Fläche gehörigen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung angesehen werden können. Da sind ferner Systeme von n Funktionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$, welche sich bei Umläufen über die Fläche hin homogen linear substituiren, also in $\sum_1^n \alpha_{1k}\eta_k, \ldots \sum_1^n \alpha_{nk}\eta_k$ übergehen: die Lösungen irgend welcher „zur Riemann'schen Fläche gehörigen" linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung etc. etc. Dann wieder mögen wir die Erweiterung versuchen, *dass wir nicht Funktionen eines Flächenpunktes x, sondern mehrerer Punkte $x, y \ldots$ unserer Riemann'schen Fläche in*

Betracht ziehen. Hier können z. B. die eben berührten Untersuchungen über algebraische Korrespondenzen auf der Fläche rubricirt werden. Hierher gehören ferner die Abel'schen Functionen, d. h. $2p$ fach periodische Functionen der Integralsummen $\int_a^{x_1 z_1} + \int_a^{x_2 z_2} + \dots \int_a^{x_m z_m}$, wo m irgendwelche Zahl sein mag. Man hat die algebraischen Functionen zweier Flächenpunkte in unserer Zeit insbesondere dazu benutzt, um spezielle zweidimensionale algebraische Gebilde („Flächen" der R_3 etc.) in ähnlicher Weise zu definiren und zu discutiren, wie wir dies betreffs der algebraischen „Curven" mit den Functionen eines Flächenpunktes in ausgiebigster Weise gethan haben. Endlich aber bietet sich die Möglichkeit, alle die so aufgezählten Functionen *in ihrer Abhängigkeit von den Constanten der Riemann'schen Fläche*, d. h. *von den $3p-3+\sigma$ Moduln, welche die Fläche besitzt, zu betrachten.* Die Theorie verwandelt sich so in eine Theorie der „Modulfunctionen", die freilich nur erst im Falle $p=1$ genauer bearbeitet ist. Das Wesentliche im Falle $p=1$ ist ja, daß man die elliptischen Functionen nicht sowohl als doppeltperiodische Functionen des Integralwerts, sondern als Functionen der Integralperioden ansicht. Etwas Analoges wäre bei höherem p zu versuchen. Es ist unmöglich, hier irgendwie

noch darauf einzugehen, welche Wendung die hiermit angedeutete Fragestellung in der Theorie der automorphen Functionen genommen hat.



